Concursul de fizică „Be a Feynman”

Soluțiile problemelor propuse

25 noiembrie 2023

1 Determinarea coeficientului de frecare folosind planul înclinat

1. Notăm cu m masa corpului de pe plan. Condiția de echilibru la translație de-a lungul planului înclinat, considerând sensul pozitiv înspre vârful planului, se scrie:

$$mg\sin\varphi = \mu mg\cos\varphi$$

De aici se obține formula căutată.
(2 puncte)

2. Condiția de echilibru la translație de-a lungul planului înclinat, considerând sensul pozitiv înspre vârful planului, se scrie pentru urcarea uniformă:

$$mg\sin\varphi + \mu mg\cos\varphi = m_1 g$$

La coborârea uniformă vom avea:

$$mg\sin\varphi - \mu mg\cos\varphi = m_2 g$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații se obține expresia cerută.
(2 puncte)

3.

$$\Delta\mu_1 = \Delta(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Delta\alpha$$

(0,5 puncte)

$$\varepsilon(\mu_2) = \varepsilon(m_1 - m_2) + \varepsilon(m_1 + m_2) + \varepsilon(\operatorname{tg}\alpha)$$
$$\varepsilon(\mu_2) = \frac{\Delta(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} + \frac{\Delta(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} + \frac{\Delta(\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}$$
$$\varepsilon(\mu_2) = \frac{2\Delta m}{m_1 - m_2} + \frac{2\Delta m}{m_1 + m_2} + \frac{\cos\alpha\Delta(\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}$$
$$\varepsilon(\mu_2) = \frac{4m_1\Delta m}{m_1^2 - m_2^2} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Delta\alpha$$
$$\Delta(\mu_2) = \mu_2\left(\frac{4m_1\Delta m}{m_1^2 - m_2^2} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Delta\alpha\right)$$
$$\Delta(\mu_2) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{4m_1\Delta m}{m_1^2 - m_2^2} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Delta\alpha\right)$$
$$\Delta(\mu_2) = \frac{4m_1\operatorname{tg}\alpha}{(m_1 + m_2)^2}\Delta m + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\frac{1}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$$

(1,5 puncte)
Alternativ, calculul poate fi realizat prin folosirea derivatelor parțiale. Rezultatul final este diferit, dar conduce la aceleași aprecieri comparative. Pașii de urmat pentru această rezolvare sunt:

$$\Delta\mu_1 = \left|\frac{\partial(\operatorname{tg}\varphi)}{\partial\varphi}\right|\delta\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Delta\alpha$$

$$\Delta\mu_2 = \left|\frac{\partial\mu_2}{\partial m_1}\right|\delta m_1 + \left|\frac{\partial\mu_2}{\partial m_2}\right|\delta m_2 + \left|\frac{\partial\mu_2}{\partial\alpha}\right|\delta\alpha$$
$$\Delta\mu_2 = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{m_1 + m_2}\Delta m + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\frac{1}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$$

Ambele metode de rezolvare primesc punctajul maxim, precum și orice altă metodă corectă de estimare a erorii.

4. În această rezolvare vom considera că eroarea de măsură pentru fiecare instrument este egală cu diviziunea sa minimă. Se punctează maxim răspunsurile care estimează această eroare ca fiind jumătate din diviziunea minimă. De altfel, deoarece erorile funcțiilor sunt liniare în erorile de măsură ale instrumentelor, comparația dintre valori se menține. Pentru valorile din datele problemei avem:

$$\mu \approx 0,19$$

$$\Delta\mu_1 \approx 0,018$$

$$\Delta\mu_2 \approx 0,0085$$

Prin folosirea celei de-a doua formule calculate anterior am fi obținut $\Delta\mu_2 \approx 0,0088$. Constatăm cum prima metodă de măsurare conduce la o eroare mai mare decât cea de-a doua.
(1 punct)

5.

$$\mu \approx 0,74$$

$$\Delta\mu_1 \approx 0,027$$

$$\Delta\mu_2 \approx 0,032$$

Prin folosirea celei de-a doua formule calculate anterior am fi obținut $\Delta\mu_2 \approx 0,033$. Constatăm cum prima metodă de măsurare conduce la o eroare mai mică decât cea de-a doua.

6. Rezultatelor subpunctelor precedente conduc la ideea că niciuna dintre metode nu este inerent superioară celeilalte, în sensul în care fiecare conduce la o imprecizie mai mică în cunoașterea coeficientului de frecare într-un anumit domeniu de valori.
Matematic, putem analiza erorile relative ale coeficientului de frecare în cele două situații:

$$\varepsilon(\mu_1) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi\cos^2\varphi}\Delta\alpha = \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\Delta\alpha$$

$$\varepsilon(\mu_2) = \frac{4m_1\Delta m}{m_1^2 - m_2^2} + \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Delta\alpha$$

Primul termen din ultima expresie este semnificativ mai mic decât cel de-al doilea, deoarece într-un laborator obișnuit putem măsura masele mult mai precis decât unghiurile. Comparând termenii legați de eroarea de măsură a unghiului planului, remarcăm cum aceasta este mai mare la unghiuri de frecare mici (când sinusul este aproape zero), respectiv mari (când cosinusul este aproape zero). Cea de-a doua metodă ne permite să setăm orice unghi dorim pentru planul înclinat, cu condiția ca acesta să fie mai mic decât unghiul de frecare. Această alegere trebuie făcută astfel încât $m_1 - m_2$ să aibă o valoare suficient de mare pentru a nu mări eroarea datorată primului termen. De asemenea, dacă pe planul înclinat este folosit un corp foarte ușor, eroarea datorată impreciziei în măsurarea maselor crește.
Se acordă 0,25 puncte pentru prezentarea fiecărui criteriu și 0.75 puncte pentru argumentarea satisfăcătoare a acestuia. Se acordă punctaje intermediare pentru argumentele deficitare.

(2 puncte)

2 Astrofizică

2.1 Formare stelară

1. Știm că energia potențială gravitațională de legătură este definită ca lucrul total efectuat de forțele de atracție pentru a aduce particulele de la infinit la stea:

$$E_{pg} = L_{tot}$$

Vom presupune că stratul de grosime dr și masă dm este alcătuit din N particule, fiecare de masă $\frac{dm}{N}$, fiecare fiind adusă de la infinit. Astfel, lucrul total elementar dL_{tot} se poate scrie conform

$$dL_{tot} = N \cdot L_{part}$$

Lucrul elementar dL_{part} efectuat asupra particulei pe o distanță infinitezimal de mică $\mathrm{d}x$ de forța de atracție $F(x)$ se scrie conform:

$$dL_{part} = \mathbf{F}(x) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = G\frac{m(r)\frac{dm}{N}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

unde s-au notat cu $\mathbf{F}$ și $\mathrm{d}\mathbf{x}$ vectorii forță, respectiv deplasare infinitezimală (vezi Fig. 1). Pentru a afla lucrul asupra particulei, vom integra după distanța x de la infinit până la raza stelei în acel moment, r:

$$\begin{aligned} L_{part} &= \int_{\infty}^{r} G\frac{m(r)\frac{dm}{N}}{x^2}\,\mathrm{d}x = Gm(r)\frac{dm}{N}\int_{\infty}^{r}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= Gm(r)\frac{dm}{N}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\infty}^{r} = Gm(r)\frac{dm}{N}\cdot\left(-\frac{1}{r} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Fiind cunoscută limita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

determinăm lucrul asupra particulei ca fiind

$$\begin{aligned} L_{part} &= -G\frac{m(r)\frac{dm}{N}}{r} \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} dL_{tot} &= -G\frac{m(r)}{r}\,dm \end{aligned}$$

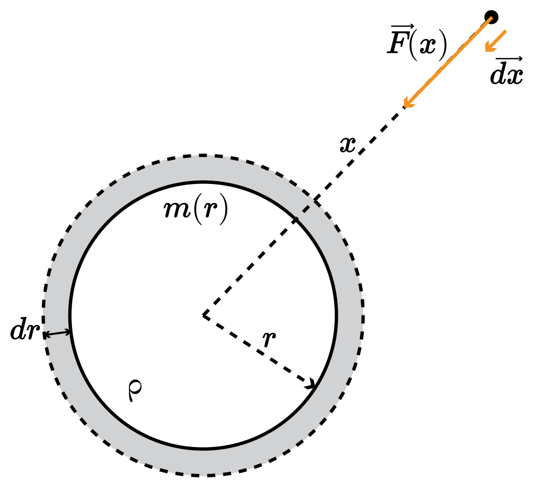


Figura 1: Aducerea particulei de la infinit

Masa elementară dm se poate afla prin două metode:

- Știind expresia $m(r) = \rho \cdot V(r) = \rho \cdot \frac{4\pi}{3}r^3$, diferențiem și obținem

$$dm = \frac{dm(r)}{dr}\cdot dr = \frac{d}{dr}\left(\rho\cdot\frac{4\pi}{3}r^3\right)dr = \rho\cdot 4\pi r^2\,dr$$

- Vom scrie masa dm în funcție de volumul stratului subțire:

$$dm = \rho \cdot V_{strat} = \rho \cdot (V(r+dr) - V(r))$$

unde $V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3$. Presupunând că $dr << r$, putem neglija termenii ce conțin dr^2 sau dr^3. În final, obținem

$$dm = \rho \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

Astfel, obținem lucrul mecanic elementar

$$dL_{tot} = -G\frac{\rho \cdot \frac{4\pi}{3}r^3}{r} \cdot \rho \cdot 4\pi r^2 \, dr = -G\frac{\rho^2(4\pi)^2}{3}r^4 \, dr$$

Lucrul total se obține integrând această relație de la 0 la raza stelei R

$$L_{tot} = \int_0^R -G\frac{\rho^2(4\pi)^2}{3}r^4 \, dr = -3G \cdot \left(\rho\frac{4\pi}{3}\right)^2 \int_0^R r^4 \, dr$$

$$= 3G \cdot \left(\rho\frac{4\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{r^5}{5}\right)\bigg|_0^R = -3G \cdot \left(\rho\frac{4\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{R^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right) = -3G \cdot \left(\rho\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{R^5}{5}$$

Rearanjând termenii și ținând cont de ecuația (1), obținem

$$E_{pg} = -\frac{3G}{5R}\left(\rho\frac{4\pi}{3}R^3\right)^2 = -\frac{3GM^2}{5R} \quad q.e.d.$$

(3 puncte)

2. În acest caz, vom considera un element de masă dm, grosime dr și volum dV, aflat la distanța r de centrul stelei. Pentru că acest element este foarte mic, îl putem considera paralelipipedic, astfel că $dV = dr \cdot dS$, unde dS este aria suprafeței în contact cu nucleul stelar de rază r (vezi Fig. 2). Echilibrul hidrostatic înseamnă ca suma algebrică a presiunilor să fie 0:

$$p(r+dr) + p_g(r) - p(r) = 0$$

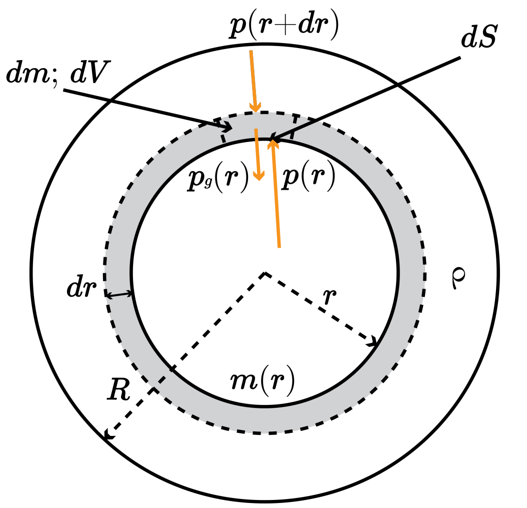


Figura 2: Presiunile care acționează asupra elementului de masă dm

Pentru $dr << r$, folosim aproximația

$$p(r+dr) \simeq p(r) + dr \cdot \left(\frac{dp(r)}{dr}\right)$$

și ecuația de echilibru devine

$$dr \cdot \left(\frac{dp(r)}{dr}\right) + p_g(r) = 0$$

Presiunea gravitațională a elementului de masă dm se scrie ca forța gravitațională pe unitatea de suprafață

$$p_g(r) = \frac{dm \cdot g(r)}{dS} = \frac{\rho \cdot dV}{dS} \cdot G\frac{m(r)}{r^2} = \frac{dV}{dS} \cdot G\frac{m(r)}{r^2}\rho$$

Știind că $dV = dr \cdot dS$, obținem

$$p_g(r) = G\frac{m(r)}{r^2}\,dr,$$

astfel că ecuația echilibrului hidrostatic devine

$$\left(\frac{dp(r)}{dr} + G\frac{m(r)}{r^2}\rho\right) \cdot dr = 0$$

Cum grosimea dr a fost aleasă arbitrar, identitatea este valabilă pentru orice valoare a mărimii dr. Deci, paranteza trebuie să fie identic nulă. AStfel, obținem ecuația finală pentru echilibrul hidrostatic

$$\frac{dp(r)}{dr} + G\frac{m(r)}{r^2}\rho = 0 \quad q.e.d.$$

(3 puncte)

3. Pentru un gaz ideal, se știe că energia internă reprezintă suma tuturor energiilor cinetice ale moleculelor constituente. Astfel,

$$\langle E_c \rangle_t = U(R)$$

Din presupunerea că singurele forțe care acționează sunt cele de atracție, energia potențială medie este egală cu cea gravitațională de legătură

$$\langle E_p \rangle_t = E_{pg} \overset{\text{i)}}{=} -\frac{3GM^2}{5R}$$

Teorema virialului capătă expresia

$$2U(R) - \frac{3GM^2}{5R} = 0$$
$$\Rightarrow U(R) = \frac{3GM^2}{10R} \quad q.e.d.$$

(1,5 puncte)

2.2 Legea atracției universale

Cum mișcarea este una circulară și uniformă, asupra planetei acționează și sunt în echilibru forța de atracție și cea centrifugă de inerție:

$$F = F_{cfi} \Rightarrow G\frac{M_S M_P}{xr^n} = \frac{M_P v^2}{r}$$
$$\Rightarrow v^2 = G\frac{M_S}{xr^{n-1}}$$

Din uniformitatea mișcării, putem scrie viteza în funcție de perioadă. Într-o perioadă se parcurge o revoluție completă în jurul stelei (adică circumferința cercului de orbită):

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

introducând această expresie în ecuația (23), obținem

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M_S}{xr^{n-1}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} \cdot x \cdot r^{n+1}$$

Vom scrie perioada în ani ca $T = T_{(ani)} \cdot (1 \text{ an})$, unde $T_{(ani)}$ este un număr și reprezintă de câte ori este mai mare perioada planetei decât un an. Similar, $r = r_{(UA)} \cdot (1 \text{ UA})$. Înlocuind, onținem

$$T^2_{(ani)} \cdot (1 \text{ an})^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} \cdot x \cdot r^{n+1}_{(UA)} \cdot (1 \text{ UA})^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow T^2_{(ani)} \cdot \frac{(1 \text{ an})^2 \cdot M_S}{(1 \text{ UA})^3} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot r^{n+1}_{(UA)} \cdot x \cdot (1 \text{ UA})^{n-2}$$

Vom analiza separat cele două fracții:

$$\frac{(1\ \text{an})^2 \cdot M_S}{(1\ \text{UA})^3} = \frac{(365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s})^2 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1.496 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3} \simeq 6 \cdot 10^{11} \frac{\text{s}^2\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\frac{4\pi^2}{G} = \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 3.14}{6.67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}} \simeq 6 \cdot 10^{11} \frac{\text{s}^2\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow \frac{(1\ \text{an})^2 \cdot M_S}{(1\ \text{UA})^3} \simeq \frac{4\pi^2}{G} \Rightarrow T^2_{(ani)} = r^{n+1}_{(UA)} \cdot x \cdot (1\ \text{UA})^{n-2}$$

Cum $T_{(ani)}$ și $r_{(UA)}$ sunt numere, trebuie ca omogenitatea ecuației să fie păstrată, adică

$$x \cdot (1\ \text{UA})^{n-2} = 1 \Rightarrow x = (1\ \text{UA})^{2-n}$$

Înlocuind, obținem

$$T^2_{(ani)} = r^{n+1}_{(UA)},$$

ceea ce, prin logaritmare, duce la

$$2 \cdot \log T_{(ani)} = (n+1) \cdot \log r_{(UA)} \Rightarrow \log T_{(ani)} = \frac{n+1}{2} \cdot \log r_{(UA)},$$

Se explică astfel dependența liniară din grafic. Coeficientul n se poate afla din panta dreptei, pe care o vom nota simbolic m. Pentru a determina panta, avem nevoie de două puncte oarecare de pe dreaptă. Vom lua, de exemplu (0,0) și (2,3). Rezultă că

$$m = \frac{n+1}{2} = \frac{3-0}{2-0} = 1.5 \Rightarrow n = 2$$

De aici, se poate afla x

$$x = (1\ \text{UA})^{2-2} = 1$$

Deci, ajungem la legea cunoscută a atracției universale

$$F = G\frac{M_S M_P}{r^2} \quad q.e.d.$$

(2,5 puncte)

3 Câmpul gravitațional al găurilor negre

1. Câmpul gravitațional produs de un corp sferic la suprafața sa este echivalent cu câmpul produs de o masă punctiformă situată în centrul său. De aceea, energia potențială de interacție dintre cele două corpuri se scrie de forma $E_{pot} = -\frac{GMm}{R^2}$. Condiția de evadare la limită presupune ca energia totală a corpului lansat să fie 0, adică la o distanță foarte mare de punctul de plecare energia sa cinetică să fie 0. Avem deci:

$$0 = -\frac{GMm}{R} + \frac{mc^2}{2}$$

Am notat viteza luminii cu c. De aici se obține:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Se consideră cunoscut rezultatul legat de câmpul gravitațional al unui corp sferic. Nu se vor depuncta lucrările care nu demonstrează acest rezultat sau demonstrațiile greșite.

(1 punct)

2. Introducem $Q_{1,2} = m_{1,2}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 G}$.

$$F_g = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Acum putem scrie modulul intensității câmpului gravitațional produs de Q_1 de forma $\Gamma_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$. De asemenea, putem scrie densitatea energiei stocate în câmpul electrostatic ca fiind $w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}$.

(1 punct)

3.
$$w_g = \frac{\varepsilon_0 \Gamma_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\right)^2 = \frac{Q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} = \frac{GM^2}{8\pi r^4}$$

(1 punct)

4. Între masă și energie există o relație de echivalență: $E = mc^2$, unde c este viteza luminii. Altfel spus, energia stocată în câmpul gravitațional se comportă ca o masă suplimentară, care generează la rândul său un câmp. Putem deci afirma că gravitația naște gravitație. În termeni matematici, această relație presupune neliniaritatea câmpului gravitațional, prin existența termenului ce conține Γ^2. Nu putem însă formula nicio afirmație similară despre câmpul electric, deoarece nu există o relație de echivalență între sarcina electrică și energie. Mai multe consecințe ale acestei situații sunt descrie la `https://www.einstein-online.info/en/spotlight/gravity_of_gravity/`.

(2 puncte)

5. Sarcina electrică creează un câmp electric, în care este stocată energie, precum arată formula oferită la punctul 3. Această energie este echivalentă, în baza relației $E = mc^2$, cu o masă, care generează la rândul său un câmp gravitațional.

(2 puncte)

6. Pe modelul prezentat în textul problemei pentru singularitatea găurilor negre neutre, căutăm distanțele la care se anulează numitorul expresiei date. Ajungem la următoarea ecuație:

$$r^2 - rr_S + r_Q^2 = 0$$

Existența unui orizont al evenimentului presupune existența unor soluții reale ale acestei ecuații. Pentru o singularitate nudă, impunem condiția $\Delta < 0$, ceea ce conduce la:

$$r_S^2 - 4r_Q^2 < 0 \implies r_S < 2r_Q$$

Înlocuind expresiile, obținem:

$$Q^2 > 4\pi\varepsilon_0 Mc^2$$

Dacă nu cunoaștem expresia exactă a razei Schwarzschild, rezultatul este:

$$Q^2 > 2\alpha\pi\varepsilon_0 Mc^2$$

(3 puncte)

4 Electronică

1. (a)

$$I(t) = \frac{V_{in}}{R}\sin(2\pi f t)$$

(0,5 puncte)

(b)

$$P(t) = \frac{V_{in}^2}{R}\sin(2\pi f t)^2$$

$$\langle P\rangle = \frac{V_{in}^2}{2R}$$

Puterea medie nu depinde de frecvență.
(0,5 puncte)

2. (a)

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$I = \frac{V_{in}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

(0,5 puncte)

(b)

$$\chi_c = \frac{1}{i\omega C}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}e^{i\phi}$$

$$\cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

$$V_{out} = V_{in}\frac{\chi_c}{Z}$$

$$V_{out} = V_{in}\frac{1}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}e^{-i(\phi - \pi/2)}$$

$$|V_{out}| = |V_{in}|\frac{1}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}$$

$$\phi' = \phi - \pi/2$$

(2 puncte)

(c) Circuitul ar putea fi folosit ca filtru dependent de frecvența semnalului de intrare. Pentru frecvențe mici, amplitudinea de ieșire este apropiata de cea de intrare, iar pentru frecvente foarte mari aceasta tinde la 0.
(0,5 puncte)

3. (a) La încărcare:

$$V_{out} = V_{in}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$t = -RC\ln(1 - \frac{V_{out}}{V_{in}})$$

$$t_{ON} = 9.16 \cdot 10^{-6}s$$

(1 punct)

(b) La descărcare:

$$V_{out} = V_{in} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = -RC\ln(\frac{V_{out}}{V_{in}})$$

$$t_{OFF} = 1.2 \cdot 10^{-5} s$$

(1 punct)

(c) Pentru ca bitul 1 sa fie recepționat, este nevoie de

$$t_1 = t_{ON} + t_{min}$$
$$t_1 = 1.916 \cdot 10^{-5} s$$

După acest interval, tensiunea de pe condensator va fi

$$V_1 = V_{in}(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}})$$
$$V_1 = 4.264V$$

Pentru a descărca condensatorul până la tensiunea necesară bitului 0 este nevoie de

$$t_{off} = -RC\ln(\frac{V_{in}}{V_1})$$
$$t_{off} = 1.044 \cdot 10^{-5} s$$

Timpul total pentru a trimite bitul 0 este

$$t_0 = t_{off} + t_{min}$$
$$t_0 = 2.044 \cdot 10^{-5} s$$

Timpul total necesar pentru a trimite cei doi biți

$$t_{tot} = t_1 + t_0$$
$$t_{tot} = 3.96 \cdot 10^{-5} s$$

(2 puncte)

(d) **(1 punct)**

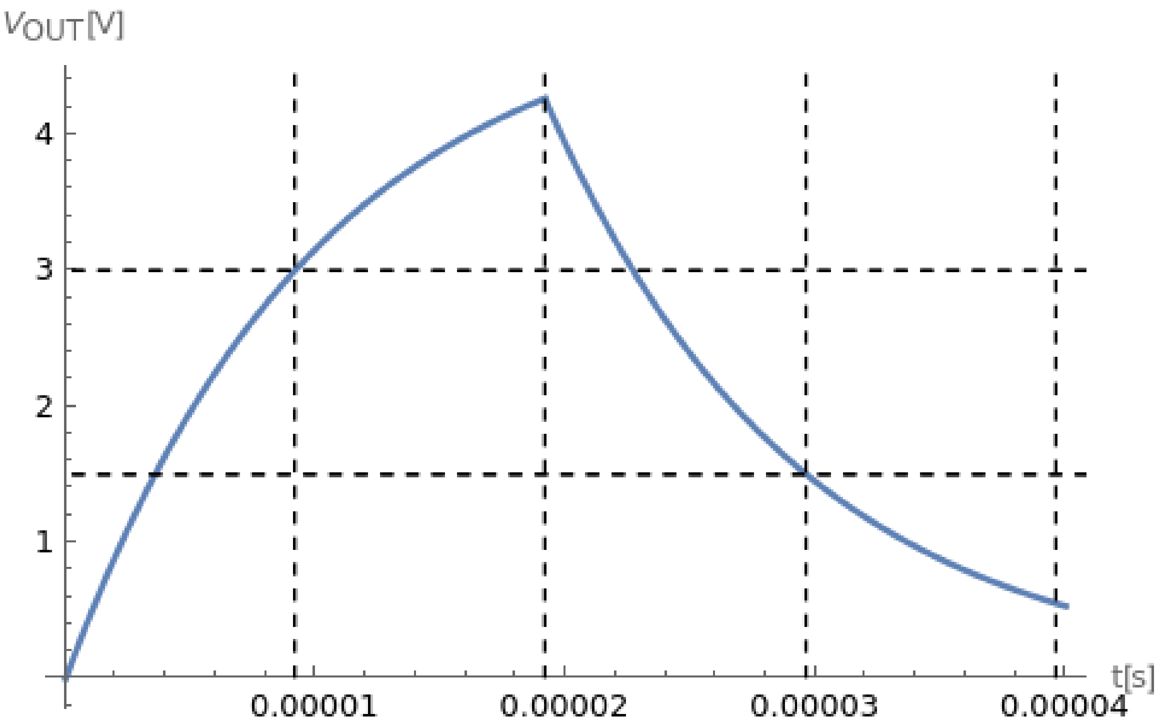


Figura 3: Exemplu de grafic

(e) Capacitatea sistemului limitează viteza de transfer a informației digitale prin acesta.
(1 punct)

5 Studiul pendulului gravitațional anarmonic

1. Componenta tangențială a accelerației pendulului deviat la un unghi θ se scrie $mg\sin\theta$. Legătura dintre accelerația liniară tangențială a_t a corpului care oscilează și accelerația sa unghiulară este dată de $l\ddot{\theta} = a_t$. Principiul al doilea al mecanicii se scrie de forma:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Semnul $-$ este dat de sensul greutății tangențiale. Notăm $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ și obținem:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

(1,5 puncte)

2. Se obține expresia:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0$$

(0,5 puncte)

3. Se obține:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0 \sin\omega t - 9\omega^2\epsilon\theta_0\sin 3\omega t$$
$$\theta^3 = {\theta_0}^3\left(\sin^3\omega t + 3\epsilon\sin^2\omega t\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

Introducând în ecuația diferențială obținută anterior, se ajunge la:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0\sin\omega t - 9\omega^2\epsilon\theta_0\sin 3\omega t$$
$$\omega_0^2\theta = \omega_0^2\theta_0\sin\omega t + \omega_0^2\epsilon\theta_0\sin 3\omega t$$
$$-\frac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24}\theta_0^3\sin\omega t + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^3\sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2}\theta_0^3\epsilon\sin^2\omega t\sin 3\omega t$$

Ecuația globală se obține adunând cele trei ecuații de mai sus. Membrul stâng va fi egal cu 0, conform ecuației diferențiale.
(1 punct)

4. Vom considera $\theta_0 = 15° = \frac{\pi}{12} \approx 0,261$ și $\varepsilon = \frac{1}{100}$ și vom analiza dimensiunea fiecărui termen din ecuația globală: Tragem din tabel concluzia că putem neglija termenul în $\sin^2\omega t\sin 3\omega t$.

Termen	Calcul numeric
$\omega^2\theta_0\sin\omega t$	$0,261\,\omega^2\sin\omega t$
$\omega_0^2\theta_0\sin\omega t$	$0,261\,\omega_0^2\sin\omega t$
$\frac{3\omega_0^2}{24}\theta_0^3\sin\omega t$	$0,002\,\omega_0^2\sin\omega t$
$9\omega^2\epsilon\theta_0\sin 3\omega t$	$0,02356\,\omega^2\sin 3\omega t$
$\omega_0^2\epsilon\theta_0\sin 3\omega t$	$0,0026\,\omega_0^2\sin 3\omega t$
$\frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^3\sin 3\omega t$	$0,0007\,\omega_0^2\sin 3\omega t$
$\frac{\omega_0^2}{2}\theta_0^3\epsilon\sin^2\omega t\sin 3\omega t$	$0,00009\,\omega_0^2\sin^2\omega t\sin 3\omega t$

(2 puncte)
Condiția ca ecuația să fie satisfăcută la orice moment de timp este ca expresiile în ωt și cei în $3\omega t$ să se anuleze. Obținem un sistem de două ecuații:

$$\begin{cases} -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3\omega_0^2}{24}\theta_0^2 = 0 \\ -9\omega^2\epsilon + \omega_0^2\epsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^2 = 0 \end{cases}$$

Se obțin următoarele rezultate:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$
$$\varepsilon = \frac{\theta_0^2}{192 - 27\theta_0^2} \approx \frac{\theta_0^2}{192}$$

(2 puncte)

5. Se pun în oscilație cele două pendule simultan și în fază. Unuia dintre acestea i se imprimă oscilații mici, astfel încât perioada sa să fie T_0 (perioada oscilațiilor armonice), iar celuilalt i se imprimă oscilații mai mari, care să necesite corecția stabilită mai sus. Vom nota perioada sa cu T. Numărăm câte perioade oscilează fiecare pendul până când cele două pendule ajung din nou în fază. Presupunând că pendulul de perioadă T_0 a oscilat m perioade, iar celălalt a oscilat n perioade, putem scrie:

$$mT_0 = nT$$

$$m\omega_0(1 + f(\theta_0)) = n\omega_0$$

$$f(\theta_0) = \frac{n}{m} - 1$$

Exactitatea rezultatului depinde de atenta determinare a momentului în care pendulele sunt din nou în fază. În condițiile date, există o limitare impusă de ochiul uman. Presupunând că am dispune de o cameră (eventual slow-motion), am putea obține rezultate mult mai precise.
Notă: se acordă punctaj maxim pentru orice soluție rezonabilă din punct de vedere practic. Pentru soluții experimentale care descriu alte metode, însă implementarea lor nu este corectă și/sau completă, se acordă punctaj parțial.
(3 puncte)

6 Spectrul atomului de hidrogen

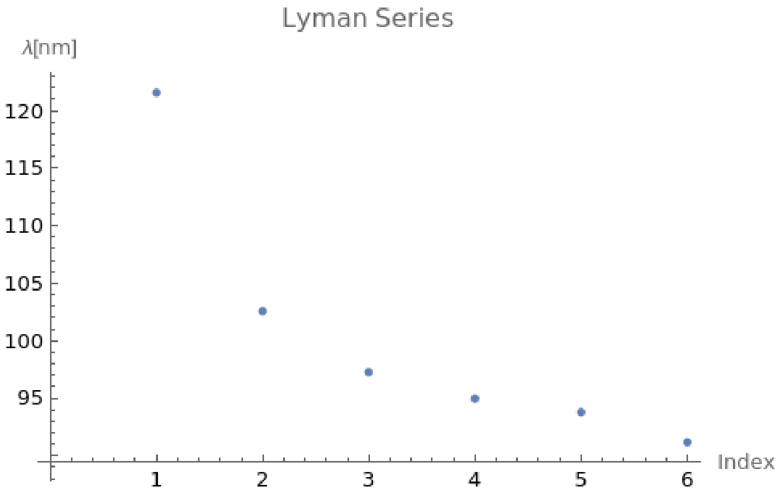


Figura 4: Seria Lyman

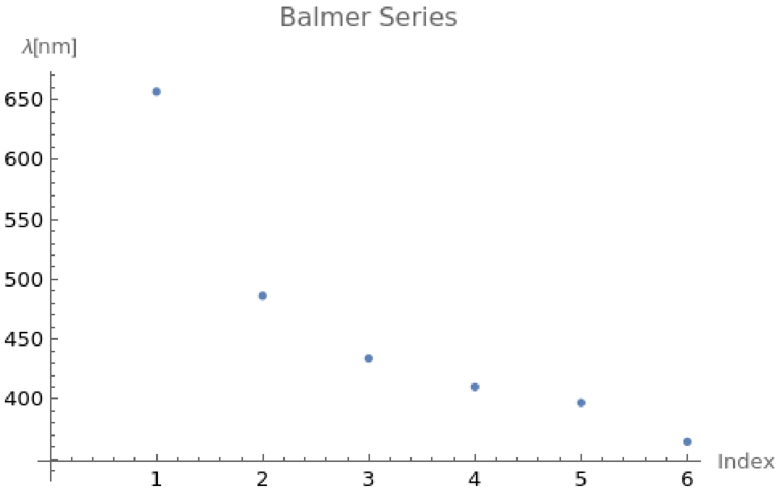


Figura 5: Seria Balmer

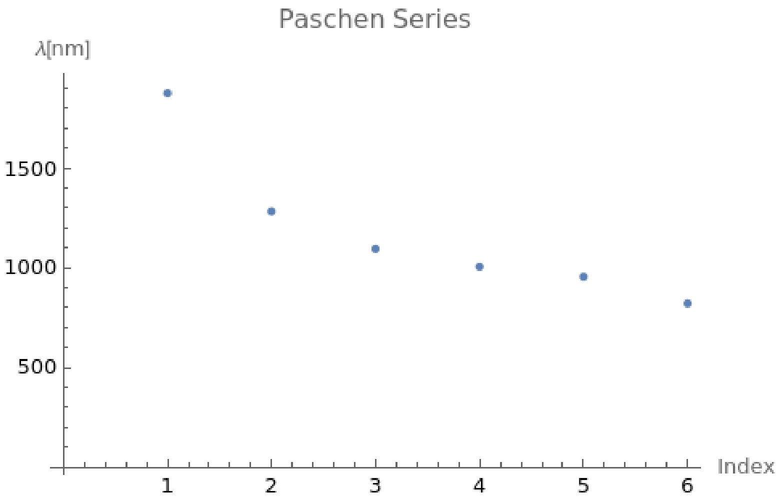


Figura 6: Seria Paschen

1. **(0,9 puncte)**
2. Seria Lyman - UV, Seria Balmer - Vizibil + UV, Seria Paschen - IR **(0,6 puncte)**
3. Exemplu de raționament: Împărțind λ_∞ din fiecare serie la toate celelalte valori ale acelei serii, se obțin numere ușor de recunoscut ca fracții cu forma dată.

Lyman: 0.749979, 0.888905, 0.937494, 0.96, 0.972222, 1.
Balmer: 0.555539, 0.750051, 0.840092, 0.888835, 0.918388, 1.
Paschen: 0.437547, 0.639938, 0.749909, 0.816318, 0.859418, 1.

Elementele din fiecare șir au expresia

$$\frac{n^2 - (n')^2}{n^2}$$

Se pot observa ușor corespondențele

$$\frac{2^2 - 1^2}{2^2} = 0.75$$
$$\frac{3^2 - 2^2}{3^2} = 0.555$$
$$\frac{4^2 - 3^2}{4^2} = 0.4375$$

Reies de aici valorile pentru n': 1, 2 și 3
Se obțin în continuare prin înlocuire valorile pentru n:

Seria Lyman: 2, 3, 4, 5, 6
Seria Balmer: 3, 4, 5, 6, 7
Seria Paschen: 4, 5, 6, 7, 8
(3,5 puncte)

4.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$
$$T = \frac{mv^2}{2}$$
$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r};$$
$$E_{tot} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

(2 puncte)

5.

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi r m\epsilon_0}}$$
$$\lambda = h/(mv)$$
$$r = \frac{h^2k^2\epsilon_0}{\pi e^2 m}$$
$$E_{tot} = -\frac{e^4 m}{8h^2k^2\epsilon_0^2}$$

(1 punct)

6.

$$E_{foton} = E_{tot}(n) - E_{tot}(n')$$
$$E_{foton} = \frac{e^4 m}{8h^2\epsilon_0^2}(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2})$$

(1 punct)

7.

$$R = \frac{e^4 m}{8ch^3\epsilon_0^2}$$

(1 punct)

7 Modelul solidului Einstein

1. Pentru $q = 0$ toți atomii au energie 0, deci există o singură microstare corespunzătoare macrostării: $\Omega(0) = 1$.
   Pentru $q = 1$ cuanta de energie poate fi distribuită pe oricare dintre cei trei atomi. Avem deci $\Omega(1) = 3$.
   Pentru $q = 2$ avem următoarele microstări, în care barele verticale separă atomii, iar numerele exprimă energia lor: $2|0|0, 0|2|0, 0|0|2, 1|1|0, 1|0|1, 0|1|1$. Deci, $\Omega(2) = 6$.
   Pentru $q = 3$ avem următoarele microstări: $3|0|0, 0|3|0, 0|0|3, 2|1|0, 2|0|1, 1|2|0, 1|0|2, 0|2|1, 0|1|2, 1|1|1$. Deci, $\Omega(3) = 10$.
   (1 punct)

2. Remarcăm cum între N atomi avem nevoie de $N - 1$ bare verticale („pereți"). Să ne imaginăm că în loc să notăm numărul de cuante de energie aferente unui atom, cum am făcut mai sus, reprezentăm o bulină pentru fiecare. De pildă, am reprezenta microstarea $2|0|1$ ca:

   $$\bullet \bullet || \bullet$$

   Avem deci de reprezentat în ordine $N + q - 1$ elemente și știm că cele q buline și cei $N - 1$ pereți formează două familii de elemente identice. Aplicăm deci formula pentru numărul permutărilor cu repetiție și obținem multiplicitatea căutată:

   $$\Omega(E) = \frac{(q + N - 1)!}{q!(N - 1)!}$$

   (3 puncte)

3. În condițiile problemei, vom renunța la termenii „-1" pretutindeni unde apar:

   $$\ln(\Omega(E)) \approx \ln\left(\frac{(q + N)!}{q!N!}\right) = \ln((q + N)!) - \ln q! - \ln N!$$

   Folosim acum formula lui Stirling:

   $$\ln(\Omega(E)) \approx (q + N)\ln(q + N - 1) - q\ln q - N\ln(N - 1)$$

   Renunțăm din nou la termenii unitate:

   $$\ln(\Omega(E)) \approx (q + N)\ln(q + N) - q\ln q - N\ln N$$

   Dar:

   $$\ln(q + N) = \ln q + \ln\left(1 + \frac{N}{q}\right)$$

   Deoarece $\frac{N}{q} \ll 1$ folosim formula de aproximare:

   $$\ln\left(1 + \frac{N}{q}\right) \approx \frac{N}{q}$$

   Deci:

   $$\ln(\Omega(E)) \approx (q + N)\ln q + (q + N)\frac{N}{q} - q\ln q - N\ln N$$

   $$\ln(\Omega(E)) \approx N\ln q + N + \frac{N^2}{q} - N\ln N$$

   Neglijăm $\frac{N^2}{q}$ și obținem:

   $$\ln(\Omega(E)) \approx N(\ln q - \ln N + 1) = N(\ln q - \ln N + \ln e) = N\ln\frac{qe}{N} = \ln\left(\frac{qe}{N}\right)^N$$

   $$\Omega(E) \approx \left(\frac{qe}{N}\right)^N$$

   (4 puncte)

4. Calculăm temperatura unui solid Einstein:

   $$S = k\ln\Omega = Nk\ln\frac{q}{N} + Nk = k\ln\Omega = Nk\ln\frac{E}{N} + Nk$$

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1} = \left(\frac{Nk}{E}\right)^{-1}$$

De unde:

$$T = \frac{k}{\hbar\omega}\ln\left(1 + \frac{N}{q}\right)$$

Scriem condiția pentru echilibrul termic, anume ca temperaturile celor două solide să fie egale:

$$\frac{q_1}{N_1} = \frac{q_2}{N_2}$$

De aici obținem:

$$\begin{cases} \frac{q_A}{N_A} = \frac{q_B}{N_B} \iff \frac{q_A}{300} = \frac{q_B}{100} \\ q_A + q_B = 10.000 \end{cases}$$

Deci $q_A = 7.500$ și $q_B = 2.500$.
(2 puncte)

8 Interferometrie Michelson

1.

$$E_{det} = E_1 + E_2$$
$$E_{det} = E(t - d_1/c) + E(t - d_2/c)$$
$$I_{det} = k(E_{det})^2$$
$$I_{det} = k(E(t - d_1/c) + E(t - d_2/c))^2$$

(1 punct)

2.

$$\langle I_{det} \rangle = k\langle (E(t) + E(t - \delta/c))^2 \rangle$$
$$\langle I_{det} \rangle = k\langle E(t)^2 \rangle + k\langle E(t - \delta/c)^2 \rangle + 2k\langle E(t)E(t - \delta/c) \rangle$$

Primii doi termeni sunt constanți în timp și pot fi neglijați, deci

$$\langle I_{det} \rangle = 2k\langle E(t)E(t - \delta/c) \rangle$$

(2 puncte)

3. Raza de lumină va trece de două ori printr-o piesă de grosime b și indice de refracție n, în loc să treacă prin aer. Noul drum optic va fi:

$$\delta' = \delta + 2b(n - 1)$$

(0,5 puncte)

4.

$$\delta(t) = 2vt$$

(0,5 puncte)

5.

$$\langle I_{det} \rangle = 2kE_0^2 \langle \sin(\omega t) \sin(\omega t(1 - 2v/c)) \rangle$$

Folosind identitatea trigonometrică corespunzătoare, obținem

$$\langle I_{det} \rangle = kE_0^2 \langle \cos(2\omega t\frac{v}{c}) + \cos(2\omega t\frac{c - v}{c}) \rangle$$

Deoarece $c >> v$, putem scrie

$$\langle I_{det} \rangle = kE_0^2 (\langle \cos(2\omega t\frac{v}{c}) \rangle + \langle \cos(2\omega t) \rangle)$$

Al doilea termen este o oscilație cu frecvență foarte mare și va fi detectat ca o intensitate constantă, deci îl putem neglija. Intensitatea detectată va fi astfel:

$$\langle I_{det} \rangle \approx kE_0^2 \cos(2\omega t\frac{v}{c})$$

Întrucât $v << c$, această oscilație va putea fi măsurată de către detector.
(5 puncte)

6. Un exemplu de utilizare ar putea fi măsurarea foarte precisă a frecvenței unei radiații coerente și monocromatice. Dispozitivul realizează o corespondență precisă între freventa radiației și frecvența mult mai mică a unei oscilații ușor de măsurat experimental.
(1 punct)

9 Ciclu termodinamic cu condensator

1. Transformările 1-2 și 3-4 sunt izoterme, iar, în virtutea faptului că singurele schimburi de căldură sunt cele cu cele două surse, transformările 2-3 și 4-1 pot fi considerate adiabatice. Obținem deci că ciclul parcurs de condensator este ciclul Carnot.

   Se acordă un punct pentru precizarea ciclului și câte 0,25 puncte pentru precizarea naturii fiecărei transformări.
   (2 puncte)

2. Folosim expresia randamentului ciclului Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

   Din teorema Carnot (sau $\eta = 1 - |Q_{cedat}|/Q_{primit}$) avem relația:

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}}$$

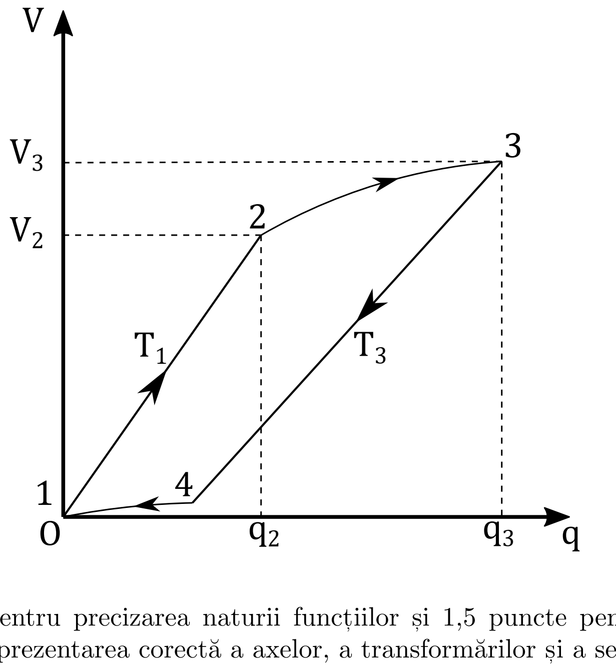
   Deci:

$$|Q_{34}| = Q_{12}\frac{T_3}{T_1}$$

   Lucrul electric L se scrie ca:

$$L = |Q_{34}| - Q_{12} = Q_{12}\left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right)$$

3. La temperatură constantă, capacitatea condensatorului este constantă, ceea ce înseamnă că funcțiile $V = V(q)$ vor fi liniare. În transformările adiabatice nu cunoaștem dependența $C = C(T)$, așa încât vom trasa reprezentări arbitrare.



   Se acordă 0,5 puncte pentru precizarea naturii funcțiilor și 1,5 puncte pentru realizarea reprezentării grafice. Se punctează reprezentarea corectă a axelor, a transformărilor și a sensului de parcurgere.
   (2 puncte)

4. Starea 4 se apropie de starea 1, iar starea 3 se apropie de starea 2. De aceea, temperaturile vor ajunge, de asemenea, apropiate. Curbele 2-3 și 4-1, având lungimi mici, pot fi aproximate ca fiind drepte.
   În cazul în care anumite observații aferente acestui subpunct sunt făcute la subpunctul următor, unde sunt necesare în rezolvare, acestea vor fi punctate.
   (1 punct)

5. În baza observației din enunț și a formulei pentru energia stocată într-un condensator, putem exprima lucrul electric sub forma ariei delimitate de graficele funcțiilor și axele de coordonate. Vom putea considera $L_{41} \approx 0$, iar L_{23} îl vom calcula considerând segmentul mic 2-3 liniar. Astfel:

$$L_{12} = \frac{q_2 V_2}{2} = C(T_1)\frac{V_2^2}{2}$$

$$L_{23} = \frac{(q_3 - q_2)(V_2 + V_3)}{2} = \frac{(C(T_3)(V_2 + \mathrm{d}V) - C(T_1)V_2)\,(2V_2 + \mathrm{d}V)}{2} \approx V_2\,(C(T_3)(V_2 + \mathrm{d}V) - C(T_1)V_2)$$

Aproximația făcută se justifică prin faptul că diferența din paranteză este deja o cantitate mică, astfel încât multiplicarea sa cu $\mathrm{d}V$ ar fi condus la o cantitate prea mică dat fiind nivelul de aproximare folosit în această problemă.

$$L_{34} \approx -\frac{q_3 V_3}{2} = -C(T_3)\frac{V_3^2}{2}$$

$$L = L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{41} \approx C(T_1)\frac{V_2^2}{2} + V_2\,(C(T_3)(V_2 + \mathrm{d}V) - C(T_1)V_2) - C(T_3)\frac{V_3^2}{2}$$

Deoarece temperaturile sunt foarte apropiate, vom scrie $T_3 = T_1 + \mathrm{d}T$. În aproximația de prim ordin, avem:

$$L \approx C(T_1)\frac{V_2^2}{2} - C(T_1 + \mathrm{d}T)\frac{(V_2 + \mathrm{d}V)^2}{2} + V_2\,(C(T_1 + \mathrm{d}T)(V_2 + \mathrm{d}V) - C(T_1)V_2)$$

$$L \approx C(T_1)\frac{V_2^2}{2} - C(T_1)\frac{V_2^2}{2} - C(T_1)V_2\,\mathrm{d}V - \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}\frac{V_2\,\mathrm{d}T}{2} + V_2\left(C(T_1)V_2 + C(T_1)\,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}V_2\,\mathrm{d}T - C(T_1)V_2\right)$$

$$L \approx -\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}\frac{V_2^2\,\mathrm{d}T}{2} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}V_2^2\,\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}\frac{V_2^2}{2}\,\mathrm{d}T$$

Dar, de la subpunctul (2):

$$L = Q_{12}\left(\frac{T_3}{T_1} - 1\right) = Q_{12}\frac{\mathrm{d}T}{T_1}$$

Prin egalarea celor două expresii obținem:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{2Q_{12}}{T_1 V_2^2}$$

(3 puncte)