Concursul de fizică „Be a Feynman”

Probleme propuse

25 noiembrie 2023

- Fiecare problemă valorează 10 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
- Rezolvați fiecare problemă pe foi separate, completând pe fiecare pagină toate rubricile prezente: pagina, numele echipei și problema pe care o rezolvați (numărul său, conform acestui document).
- Scrieți eventualele întrebări cu privire la subiect pe o foaie de hârtie, apoi oferiți foaia supraveghetorului vostru. Menționați în dreptul fiecărei întrrebări numărul problemei și autorul acesteia, confom foii cu subiecte. Veți primi răspunsul la întrebări sub forma unui mesaj scris.

1 Determinarea coeficientului de frecare folosind planul înclinat

În această problemă vom studia două metode prin care poate fi determinat coeficientul dinamic de frecare la alunecare dintre un corp și suprafața unui plan înclinat de unghi variabil. Ulterior, cele două metode vor fi comparate pentru a decide care dintre ele conduce la erori mai mici pentru coeficientul de frecare. Pentru ambele metode se consideră că, prin intermediul unui mic impuls dat corpului, forțele de frecare statice sunt învinse, așa încât nu vor fi considerate în această analiză.
Prima metodă presupune varierea unghiului de înclinare a planului pentru găsirea acelui unghi la care corpul alunecă uniform pe plan.

1. Demonstrați că expresia coeficientului dinamic de frecare la alunecare μ determinat prin această metodă este $\mu_1 = \operatorname{tg}\varphi$, unde φ este unghiul de înclinare a planului, pe care îl considerăm măsurat. [2 puncte]

A doua metodă presupune fixarea unghiul planului la o valoare α măsurată, pentru care corpul alunecă accelerat pe planul înclinat. Atașând, prin intermediul unui scripete ideal, diferite mase, se imprimă o forță asupra corpului, orientată în sus de-a lungul planului. Pentru masa atașată m_1 corpul urcă uniform pe plan, iar pentru masa atașată m_2 acesta coboară uniform pe plan.

2. Demonstrați că expresia coeficientului dinamic de frecare la alunecare μ determinat prin această metodă este $\mu_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \operatorname{tg}\alpha$. [2 puncte]

Pentru a calcula erorile asociate celor două metode, puteți folosi următoarele rezultate, unde prin Δx am notat eroarea absolută a unei mărimi x, iar prin $\varepsilon(x)$ eroarea relativă a acesteia.

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$$

$$\varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$$

$$\varepsilon(a/b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$$

$$\Delta(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{1}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha$$

Vom considera că masele atașate de scripete și unghiul planului înclinat pot fi măsurate, iar impreciziile în determinarea lor sunt Δm, respectiv $\Delta\alpha$.

3. Calculați erorile maxime absolute $\Delta\mu_1$ și $\Delta\mu_2$ aferente unei determinări a coeficientului de frecare prin fiecare dintre cele două metode. [2 puncte]

Considerați că s-au măsurat următoarele valori prin metoda a doua: $m_1 = 100,0$ g, $m_2 = 50,0$ g, $\alpha = 30°$. Prin prima metodă, pentru același sistem, s-a măsurat valoarea $\varphi = 11°$. Considerați că masele s-au măsurat folosind o balanță electronică care arată valorile în grame, cu o zecimală, iar unghiurile s-au măsurat cu un raportor obișnuit (un număr întreg de grade sexagesimale).

4. Care dintre cele două metode propuse conduce la o eroare mai mică pentru coeficientul de frecare? [1 punct]

5. Răspundeți la aceeași întrebare pentru un sistem diferit, pentru care s-au măsurat, folosind aceleași instrumente, următoarele valori: $m_1 = 100,0$ g, $m_1 = 40,0$ g, $\alpha = 60°$, $\varphi = 37°$. [1 punct]

6. Analizând formulele pentru erorile absolute ale coeficientului de frecare, precum și rezultatele subpunctelor precedente, prezentați două criterii de care un experimentator ar trebui să țină seama atunci când alege metoda pe care să o folosească, presupunând că dispune de instrumente precum cele descrise anterior. Explicați cum ați obținut criteriile pe care le prezentați. [2 puncte]

Subiect propus de Andrei Marin, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

2 Astrofizică

2.1 Formare stelară

Procesele de formare stelară sunt, în general, foarte complexe și o bună înțelegere a acestor fenomene presupune cunoștințe de specialitate în domenii precum mecanica cuantică și fizica nucleară, printre altele. Să presupunem însă că procesul poate fi aproximat cu unul clasic, în care materia dintr-un nor cosmic colapsează sub influența forțelor de atracție. Cum presupunerile modelului sunt cele ale mecanicii clasice, aceste forțe trebuie să respecte Legea Atracției Universale a lui Newton:

$$F(x) = G\frac{mM}{x^2}$$

pentru două corpuri de mase m și M aflate la distanța x. Constanta G se numește *constanta atracției universale* și are valoarea:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

Vom presupune că steaua noastră nu are mișcare de rotație proprie și nici câmp magnetic propriu. De asemenea, la suprafața stelei vom considera neglijabile efectele mareice dacă aceasta aparține unui sistem stelar. Astfel, toate considerațiile ne permit să aproximăm forma stelei cu o sferă.

Pentru acest tip de stea, putem defini energia potențială gravitațională de legătură ca lucrul mecanic efectuat de forțele de atracție pentru aducerea materiei componente de la infinit la suprafața stelei la un moment dat (vezi Fig. 1).

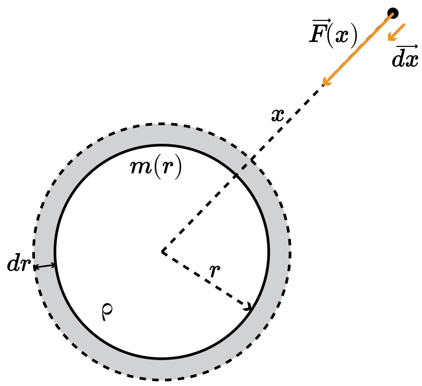


Figura 1: Procesul de formare stelară abordat clasic.

1. Să se calculeze energia potențială gravitațională de legătură a unei stele de masă M și rază R la echilibru hidrostatic. Se consideră că densitatea stelei este constantă. [3 puncte]

2. Presupunând că singurele presiuni prezente sunt cea gravitațională și cea exercitată de gazul stelei (vezi Fig. 2), deduceți ecuația echilibrului hidrostatic:

$$\frac{dp(r)}{dr} + G\frac{m(r)}{r^2}\rho = 0,$$

unde $p(r)$ - presiunea exercitată de gaz, $m(r)$ - masa stelei când raza acesteia este r, ρ - densitatea stelei. S-a notat cu $\frac{dp}{dr}$ derivata întâi a funcției p în raport cu variabila r. Se presupune cunoscută expresia accelerației gravitaționale la suprafața nucleului stelar de rază arbitrară r:

$$g(r) = G\frac{m(r)}{r^2}$$

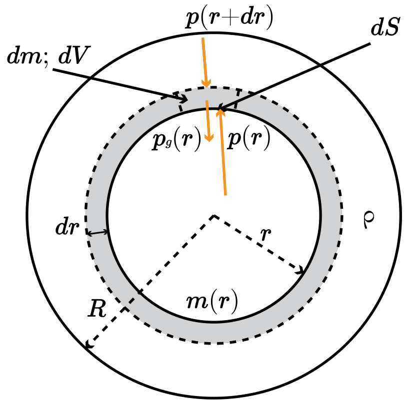


Figura 2: Presiunile care acționează asupra unui element de grosime dr și suprafața bazei dS. Se consideră că elementul (de masă dm) este suficient de mic încât poate fi considerat paralelipipedic.

[3 puncte]

3. Teorema virialului stabilește o legătură între media în timp a energiei cinetice și media în timp a energiei potențiale pentru sistemul nostru de particule. Matematic, legea are forma:

$$\langle E_p \rangle_t + 2 \cdot \langle E_c \rangle_t = 0$$

unde $\langle x \rangle_t$ reprezintă media în timp a mărimii x.

Să se calculeze energia internă a stelei $U(R)$, considerând gazul ca fiind ideal și monoatomic. [1,5 puncte]

Se știe că însumarea unor cantități de forma $f(x)\Delta x$, unde Δx poate fi considerat arbitrar de mic, iar x variază între a și b, se scrie sub forma:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b),$$

unde:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pe care o puteți calcula folosind formulele de mai jos. Dacă $a = \pm\infty$, se operează substituția:

$$F(a) \to \lim_{x \to \pm\infty} F(x)$$

Pentru $b = \pm\infty$ se procedează similar. Se dau următoarele identități matematice:

$$\int x^\alpha \ \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x + \mathrm{d}x) \simeq f(x) + \mathrm{d}x \cdot \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right), \quad \mathrm{d}x << x$$

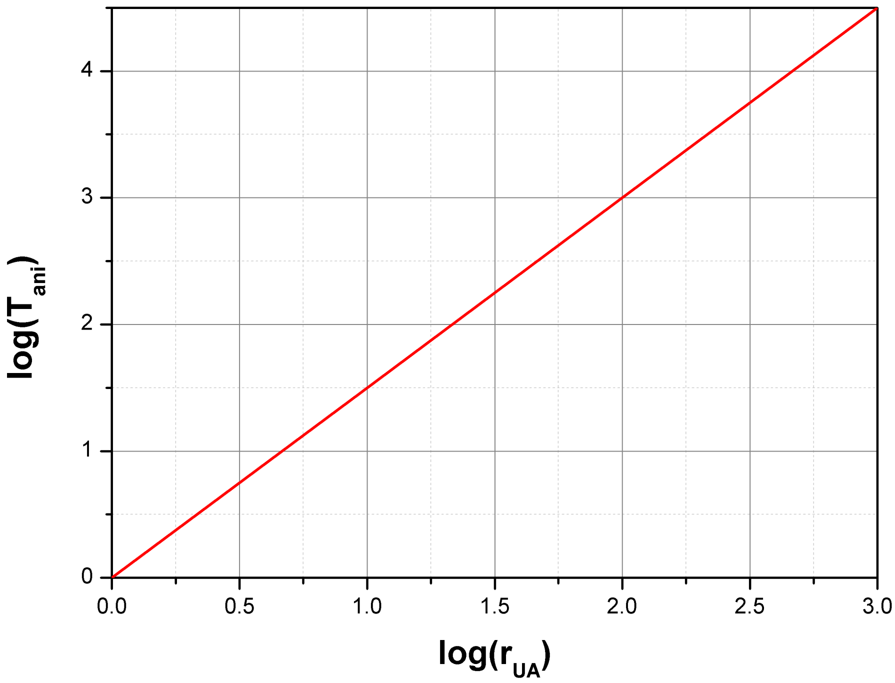
$$\int [c \cdot f(x)] \ \mathrm{d}x = c \cdot \left(\int f(x) \ \mathrm{d}x\right), \text{ unde } c \text{ este o constantă aleasă arbitrar}$$

2.2 Legea Atracției Universale

Să presupunem că în jurul acestei stele (a cărei masă considerăm că este egală cu masa Soarelui $M_S \simeq 1.99 \cdot 10^{30}$ kg) orbitează, în mișcare uniformă, o planetă pe o traiectorie circulară de rază r. Considerând că legea atracției universale este de forma:

$$F = G\frac{M_S M_P}{x \cdot r^n},$$

să se determine coeficienții x și n. Se cunosc constanta atracției universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}, unitatea astronomică 1 UA $= 1,496 \cdot 10^{11}$ m și graficul dependeței $\log T_{(ani)} = f(\log r_{(UA)})$.



[2,5 puncte]

Subiect propus de Mihai Dragomir, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

3 Câmpul gravitațional al găurilor negre

Găurile negre sunt corpuri al căror câmp gravitațional este atât de puternic încât lumina nu poate „evada" din acestea. Prima mențiune a unui corp similar găurilor negre datează din 1784, când John Michell, care și-a imaginat o „stea întunecată", a cărei gravitație este suficient de puternică încât să atragă înapoi lumina pe care o emite. Desigur, astăzi știm că această descriere este perimată. În această problemă vom studia câteva aspecte legate de găurile negre și teoria gravitației.

1. Calculați raza maximă R pe care ar trebui s-o aibă un corp sferic de masă M, astfel încât un corp lansat cu viteza luminii de pe suprafața sa să nu poată evada din câmpul gravitațional al acestuia. [1 punct]

Rezultatul obținut astfel este demonstrat și în relativitatea generală pentru găurile negre care nu se rotesc și nu sunt încărcate electric. Limita aceasta se numește orizont al evenimentului. În continuare, vom explora o proprietate care diferențiază câmpul gravitațional de cel electrostatic, deși expresiile lor în fizica clasică sunt similare. Redăm mai jos expresiile modulelor forței de atracție electrostatică dintre două sarcini (q_1 și q_2) de semn contrar aflate în vid, respectiv dintre două mase (m_1 și m_2):

$$F_{es} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Aici r este distanța dintre cele două corpuri, iar ε_0 este o constantă denumită permitivitatea electrică a vidului.

2. Folosind o schimbare adecvată de variabile, introduceți „sarcinile gravitaționale" Q_1 și Q_2 astfel încât expresia forței gravitaționale să se scrie întocmai precum expresia forței electrostatice. [1 punct]

Acum putem scrie modulul intensității câmpului gravitațional produs de Q_1 de forma $\Gamma_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$. De asemenea, putem scrie densitatea energiei stocate în câmpul electrostatic ca fiind $w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2}$.

3. Folosind analogia făcută până acum, scrieți expresia densității de energie de interacțiune gravitațională asociate unei găuri negre de masă M și rază R, într-un punct exterior găurii negre. [1 punct]

4. Densitatea de energie calculată mai sus are o semnificație fizică deosebită în fizica gravitației, care nu își găsește corespondentul în electrostatică. Care este deosebirea fundamentală dintre masă și sarcină electrică ce conduce la o asemenea diferență? [2 puncte]

Din punct de vedere matematic, orizontul evenimentului apare în ecuațiile din relativitatea generală sub forma unui termen de forma $\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r_S}{r}}$, unde r_S este raza determinată la punctul 1, numită rază Schwarzschild. Acest termen se referă la deformarea spațiului de-a lungul coordonatei radiale. Se observă că pentru $r = r_S$ numitorul se anulează, ceea ce creează o singularitate matematică. În cazul găurilor negre fără mișcare de rotație și încărcate electrostatic cu sarcina Q, expresia de mai sus devine:

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r_S}{r}+\left(\frac{r_Q}{r}\right)^2}$$

Aici $r_Q = \frac{Q^2 G}{4\pi\varepsilon_0 c^4}$, unde cu c am notat viteza luminii.

5. Expresia de mai sus se aplică indiferent dacă în vecinătatea găurii negre se află un corp încărcat electric sau unul neutru, având legătură strict cu câmpul gravitațional al găurii negre. Explicați intuitiv cum afectează sarcina electrică a găurii negre interacțiunea dintre un corp neutru din punct de vedere electric și gaura neagră. [2 puncte]

Teoria relativității generale prezice posibilitatea existenței așa-numitelor „singularități nude" (*naked singularities*), adică a unor singularități care să nu aibă un orizont al evenimentului. Până acum nu au fost observate asemenea corpuri, iar comportamentul pe care ar trebui să-l aibă mai este încă studiat.

6. Pentru o gaură neagră de masă M, obțineți o condiție pentru sarcina electrică Q astfel încât gaura neagră să fie o singularitate nudă. Dacă nu ați obținut o soluție pentru punctul 1 al problemei, folosiți pentru raza Schwarzschild expresia $\alpha\frac{GM}{c^2}$, unde α este un număr. [3 puncte]

Subiect propus de Andrei Marin, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

4 Electronică

În cadrul acestei probleme veți analiza comportamentul elementelor pasive de circuit (rezistori, condensatori și bobine) în diverse condiții experimentale.

1. Un rezistor R este conectat la o sursă ideală de tensiune alternativă cu amplitudine constantă V_{in} și frecvență variabilă f.

   (a) Exprimați dependența de timp a intensității prin circuit în funcție de mărimile precizate. [0,5 puncte]

   (b) Exprimați puterea medie pe rezistor în funcție de frecvența sursei. Particularizați rezultatul pentru $f = 0$ și $f \to \infty$. [0,5 puncte]

2. În serie cu rezistorul este adăugat un condensator ideal cu capacitate C.

   (a) Exprimați amplitudinea curentului prin circuit. [0,5 puncte]

   (b) Exprimați amplitudinea tensiunii de pe condensator (V_{out}) și a diferenței de fază dintre tensiunea sursei și cea de pe condensator. [2 puncte]

   (c) Descrieți pe scurt o posibilă utilitate practică a acestui tip de circuit. [0,5 puncte]

3. Vom folosi circuitul de la punctul precedent pentru a modela, într-o primă aproximație, transferul de informație digitală binară printr-un cablu. În sistemul logic pe care îl folosim, cifra 0 este reprezentată de o tensiune $V_0 \in (0.0, 1.5)$ V, iar cifra 1 de o tensiune $V_1 \in (3.0, 5.0)$ V. Înlocuim sursa cu o alta ideală de tensiune continuă, care poate fi pornită ($V_{in} = 5$ V) și oprită ($V_{in} = 0$ V) instantaneu. Vom folosi ca valori pentru componente $R = 100\Omega$ și $C = 100nF$. Vom considera ca tensiune de ieșire V_{out} tensiunea de pe condensator.

   (a) La momentul de timp $t = 0$, pornim sursa. Care este durata minimă de timp necesară pentru ca V_{out} să fie înregistrat ca un 1 logic? [1 punct]

   (b) După un timp suficient, considerăm condensatorul încărcat la maxim. În acel moment, oprim sursa. Care este durata minimă de timp necesară pentru ca V_{out} să fie înregistrat ca un 0 logic? [1 punct]

   (c) Presupunând că, pentru ca un bit să fie recepționat corect, tensiunea citită trebuie să fie în intervalul corespunzător timp de $t_{min} = 10^{-5}$ s. Care este timpul minim necesar pentru a transmite biții 10? Sursa poate fi pornită sau oprită doar în momentul în care un bit a fost corect recepționat. [2 puncte]

   (d) Reprezentați pe un grafic mărimile V_{in}, V_{out} și I de la punctul precedent. [1 punct]

   (e) Ce constrângeri practice pot implica consecințele analizei de mai sus? [1 punct]

Subiect propus de Octavian Ianc, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

5 Studiul pendulului gravitațional anarmonic

Pentru unghiuri mici (până în aproximativ $6°$), oscilațiile unui pendul gravitațional pot fi considerate armonice. În această problemă vom investiga comportarea unui pendul gravitațional la unghiuri pentru care aproximația micilor oscilații nu mai funcționează.

1. Deduceți ecuația de mișcare pentru un pendul gravitațional de lungime l, știind că accelerația gravitațională este g. Notați unghiul de deviație a pendulului față de poziția de echilibru cu θ și pulsația acestuia cu ω_0. [1,5 puncte]

2. Față de cazul micilor oscilații, vom folosi o aproximare mai bună pentru $\sin\theta$:

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

   Scrieți ecuația diferențială obținută aplicând această aproximație. [0,5 puncte]

În ecuația diferențială obținută pentru unghiuri mici întâlneam un termen liniar în θ și obțineam o oscilație de pulsație ω. Putem presupune că termenului θ^3 îi va corespunde o oscilație de pulsație 3ω, unde ω este pulsația pendulului gravitațional pentru oscilații mici. Reamintim în acest sens identitatea trigonometrică $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$, care leagă cubul sinusului de unghiul triplu. De aceea, vom căuta soluții pentru ecuația obținută la punctul 2 care să cuprindă ambii termeni:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\omega t + \varepsilon\theta_0 \sin 3\omega t$$

Aici ε este o constantă adimensională care ia valori mult mai mici decât unitatea pentru unghiuri nu prea mari, adică în regimul de aproximație pentru $\sin\theta$ pe care l-am introdus la punctul 2. Am presupus, pentru simplificarea calculelor, condiția inițială $\theta = 0$ la $t = 0$.

3. Înlocuiți expresia lui $\theta(t)$ în ecuația diferențială obținută la punctul 2 și păstrați numai termenii cel mult liniari în ε. [1 punct]

4. Analizând ecuația obținută, obțineți expresii pentru ω și ε în funcție de ω_0 și θ_0. Este posibil să aveți nevoie să neglijați anumiți termeni ai ecuației. Pentru a putea decide dacă este posibil acest lucru, alegeți o valoare rezonabilă pentru θ_0 și calculați numeric coeficienții diferiților termeni. [4 puncte]

Prin rezolvarea punctelor anterioare se obține o expresie de forma $\omega = \omega_0(1 + f(\theta_0))$, unde f este o funcție de amplitudinea θ_0.

5. Aveți la dispoziție două pendule identice din laboratorul de fizică. Propuneți un experiment pentru aflarea termenului $f(\theta_0)$ la un unghi oarecare. Considerați că dispuneți de un corp suficient de greu încât atenuarea oscilațiilor să fie mică. Nu puteți măsura lungimi sau timpi. [3 puncte]

Subiect propus de Andrei Marin, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

6 Spectrul atomului de hidrogen

Una din cele mai utilizate metode de analiză a structurii atomice este spectroscopia de emisie. Atomii elementului de interes sunt trecuți în stare gazoasă și excitați cu ajutorul unui câmp electric. Aceștia emit fotoni într-un spectru caracteristic, fotoni care sunt separați în funcție de lungimea de undă (putem folosi, spre exemplu, o prismă) și măsurați.

În cele ce urmează veți analiza spectrul caracteristic al atomului de hidrogen și veți compara rezultatul cu cel prezis de un model matematic simplu. Tabelul de mai jos conține o parte din lungimile de undă ale hidrogenului, grupate în trei serii, toate denumite după fizicieni care au contribuit la descoperirea lor.

Tabela 1: Liniile spectrale ale hidrogenului (nm)

Seria Lyman	Seria Balmer	Seria Paschen
121.57	656.3	1875
102.57	486.1	1282
97.254	434.0	1094
94.974	410.2	1005
93.780	397.0	954.6
...	...	...
91.175	364.6	820.4

1. Reprezentați pe grafice separate lungimile de undă din fiecare serie în funcție de ordinea în care apar în tabel. Neglijând elementele lipsă, puteți considera că ultimul rând îi urmează direct precedentului. [0,9 puncte]

2. Scrieți regiunea spectrului electromagnetic (unde radio, infraroșu, vizibil, ultraviolet, raze X, raze gamma) în care se regăsește fiecare serie. [0,6 puncte]

3. După multe încercări, s-a observat că valorile lungimilor de undă în cadrul unei serii din tabel pot fi modelate cu ajutorul următoarei formule:

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

unde λ este lungimea de undă, R este o constantă, iar n și n' sunt numere naturale. Valorile de pe ultimul rând se obțin pentru $n \to \infty$, iar celelalte se obțin pentru valori mici ale lui n și n' (< 10). Știind că n' nu variază în cadrul unei serii, calculați parametrii R, n, n' ce descriu fiecare lungime de undă. Justificați raționamentul utilizat. [3,5 puncte]

4. Atomul de hidrogen poate fi modelat simplificat ca un electron ce orbitează pe o orbită circulară în jurul unui proton sub acțiunea unei forțe coulombiene. Exprimați energia totală a electronului în funcție de raza orbitei. [2 puncte]

5. S-a observat că, în realitate, electronul nu poate avea orice energie posibilă clasic. Astfel, Louis de Broglie a lansat în 1924 ipoteza că electronul s-ar comporta ca o undă cu $\lambda = \frac{h}{m_e v}$, unde h este constanta lui Planck, m_e este masa electronului, iar v viteza acestuia. În această ipoteză, electronii ar putea exista doar pe orbite în care se respectă condiția de staționaritate a undei lor $k\lambda = 2\pi r$, unde k este un număr natural, iar r raza unei orbite permise. Calculați E_k, energia corespunzătoare orbitei în funcție de parametrul k. [1 punct]

6. Știind că la trecerea unui electron de pe nivelul n pe nivelul n' se emite un foton cu frecvența $h\nu = E_n - E_{n'}$, deduceți dependența lungimii de undă a fotonului în funcție de n, n' și constante fizice. [1 punct]

7. Comparați rezultatul de la subpunctul precedent cu formula empirică de la subpunctul 3) și exprimați constanta R. [1 punct]

Subiect propus de Octavian Ianc, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

7 Modelul solidului Einstein

Fizica solidului a dezvoltat modele pentru a calcula teoretic diferite proprietăți ale materialelor. Modelul Einstein este un model pentru solidele cristaline, presupune a fi alcătuite dintr-un număr mare de atomi în vibrație. Fiecare dintre aceștia este tratat ca un oscilator cuantic independent de ceilalți atomi. Singura proprietate a oscilatorului cuantic necesară în această problemă este că acesta poate avea numai anumite energii, iar diferența energetică dintre nivelurile permise este constantă. De aceea, putem descrie un solid Einstein ca fiind compus din N atomi, cărora le sunt distribuite q cuante (porții) de energie. Energia totală a solidului se poate scrie deci ca $E = qE_0$, unde E_0 este cuanta de energie. Pentru că nu ne interesează energia efectivă, ci numărul cuantelor de energie, vom considera $E_0 = 1$.
În fizica statistică, un element foarte important este numărul de stări microscopice (microstări) care descriu o aceeași stare macroscopică (macrostare). În cazul nostru, macrostarea este energia totală a solidului, iar microstarea se referă la distribuția energiei între atomii individuali. Vom nota numărul de microstări aferente macrostării de energie E cu $\Omega(E)$, numit și multiplicitatea macrostării cu energia E.

1. Reprezentați microstările corespunzătoare unui sistem cu $N = 3$ atomi pentru q de la 0 la 3. Precizați multiplicitatea fiecărei macrostări. [1 punct]

2. Deduceți o formulă generală pentru multiplicitatea unei macrostări cu q cuante de energie a unui solid format din N atomi. [3 puncte]

3. Știind că $q \gg N \gg 1$, demonstrați că expresia anterioară poate fi aproximată ca $\Omega(E) \approx \left(\frac{qe}{N}\right)^N$, unde e este baza logaritmului natural, folosind eventual formula lui Stirling:

$$\ln n! \approx n \ln n - n, \quad n \gg 1$$

[4 puncte]

Din punct de vedere statistic, pentru un ansamblu izolat putem introduce următoarele formule pentru entropie, respectiv temperatură:

$$S = k_B \ln \Omega$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

Aici k_B este constanta Boltzmann, iar ∂ desemnează o derivată parțială; puteți trata derivata parțială ca o derivată totală (d) în care tratați drept constante variabilele în funcție de care nu se derivează.
Vom considera acum un ansamblu izolat format din două solide Einstein A și B, care schimbă energie între ele.

4. Considerând $N_A = 300$, $N_B = 100$ și $q_A + q_B = 10.000$, aflați în mod riguros energia solidului A la echilibru. [2 puncte]

Indicație: se cunoaște formula pentru numărul permutărilor cu repetiție pentru N elemente dintre care se pot extrage m familii de câte k_m elemente identice:

$$A = \frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

Indicație: se cunoaște formula $\ln(1 + x) \approx x$, valabilă pentru $x \ll 1$.

Subiect propus de Andrei Marin, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

8 Interferometrie Michelson

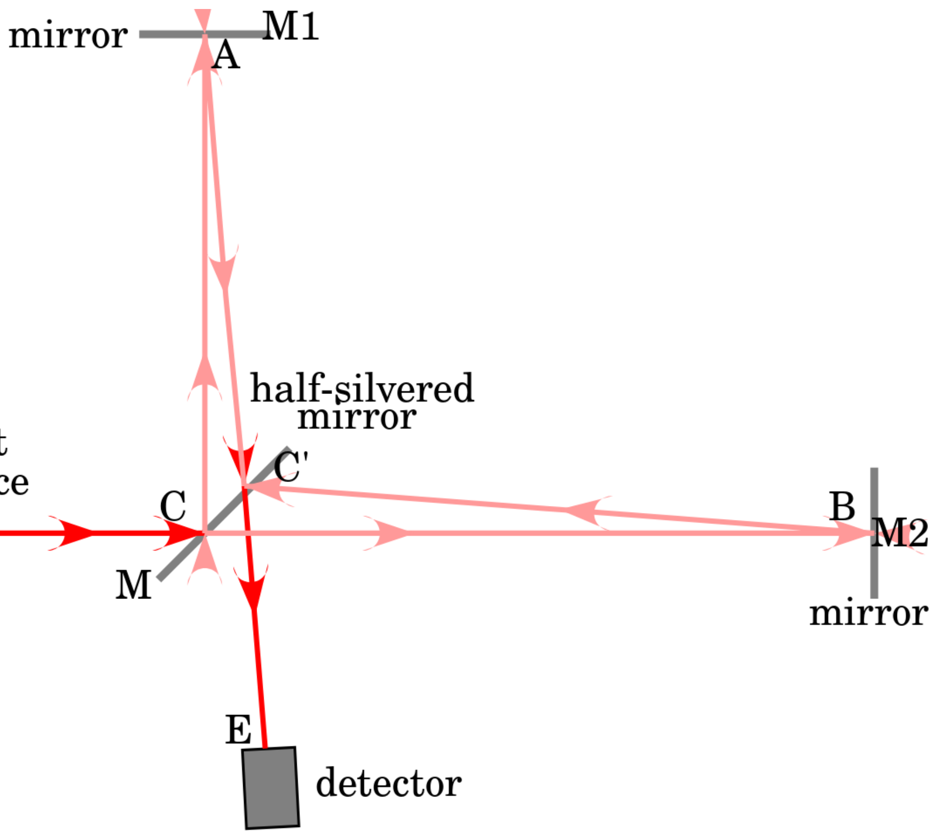


Figura 3: Interferometrul Michelson (Wikipedia)

Interferometrele Michelson sunt dispozitive experimentale foarte utilizate în fizica modernă. Apărute în finalul secolului al XIX-lea în încercarea eșuată de a măsura viteza Pământului prin presupusul eter, aceste dispozitive au făcut posibilă una dintre cele mai mari revoluții științifice: relativitatea specială. În prezent, interferometrele Michelson sunt utilizate în mod curent pentru măsurători de precizie, spectroscopie FTIR, iar principiul din spatele lor stă la baza experimentului LIGO, care a detectat pentru prima dată cu succes undele gravitaționale.

Dispozitivul este format dintr-o sursă de lumină coerentă ce este împărțită printr-o oglindă argintată (beamsplitter) în două brațe. La capetele brațelor se află oglinzi ce reflectă lumina, aceasta fiind recombinată de către beamsplitter și trimisă spre un detector ce măsoară intensitatea luminii în funcție de timp.

1. Sursa S emite lumină al cărui câmp electric (real) variază după legea $E(t)$, unde t este timpul. Știind viteza luminii c și drumurile optice parcurse de lumină pe cele două brațe (C-A-C': d_1 și C-B-C': d_2), scrieți expresia $I_{det}(t)$ (intensitatea luminoasă măsurată de detector). Neglijați toate celelalte drumuri optice și diferența de fază datorată oglinzilor. Puteți folosi k drept constantă de proporționalitate. [1 punct]

2. Deoarece suntem mai interesați de diferența dintre cele două drumuri optice, vom considera mai departe $d_1 < d_2$, $d_1 = 0$ și $d_2 = \delta$. Scrieți expresia $\langle I(\delta)\rangle$, valoarea medie în timp a intensității măsurată în funcție de diferența de drum optic. Din expresia obținută, neglijați toți termenii independenți de δ. [2 puncte]

3. De-a lungul brațului C-B-C' se montează o bucată plană de sticlă cu grosime b și indice de refracție n. Calculați δ', noua diferență de drum optic, în funcție de δ, b și n. [0,5 puncte]

4. Piesa de sticlă de la subpunctul anterior este eliminată. Se adaugă sistemului un mecanism motorizat care permite deplasarea spre exterior a oglinzii M_2 cu viteza v foarte mică, pornind de la o poziție inițială la care $d_2 = 0$. Exprimați $\delta(t)$. [0,5 puncte]

5. Păstrăm setup-ul cu oglinda motorizată de la subpunctul anterior. Considerăm că sursa emite o lumină vizibilă monocromatică de coerență foarte bună, al cărei câmp electric poate fi aproximat cu o funcție sinusoidală de pulsație ω și amplitudine E_0. Folosindu-vă de informațiile și rezultatele de la subpunctele

anterioare, calculați intensitatea măsurată pe detector în funcție de timpul de la începerea mișcării oglinzii. [5 puncte]

Note: Luați în calcul că detectorul nu poate sesiza natura oscilatorie a luminii vizibile, aceasta fiind percepută ca o medie temporală; în schimb poate observa oscilații cu frecvență mică. De asemenea, vă puteți folosi de rezultatul de la subpunctul 2.

6. Care este o potențială aplicație a utilizării interferometrului Michelson în studiul luminii vizibile? Vă puteți folosi de rezultatul subpunctului precedent. [1 punct]

Subiect propus de Octavian Ianc, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București

9 Ciclu termodinamic cu condensator

În această problemă vom investiga comportamentul unui condensator a cărui capacitate este dependentă de temperatură pe parcursul unui ciclu termodinamic compus din următorii pași:

1-2: Condensatorul, inițial fără sarcină elecrrică pe armături, este menținut la o temperatură constantă T_1 în timp ce este încărcat lent cu sarcina q_2 și atinge diferența de potențial V_2. Neglijați pierderile de energie asociate cu procesul de încărcare. Pe parcursul acestui proces condensatorul primește cantitatea de căldură Q_{12}.

2-3: Condensatorul este încărcat lent până atinge diferența de potențial V_3 și temperatura T_3.

3-4: Condensatorul este menținut la temperatura constantă T_3 și este descărcat lent.

4-1: Condensatorul se descarcă lent și revine în starea inițială cu temperatură T_1 și sarcină nulă.

Se consideră că singurele corpuri cu care condensatorul schimbă căldură sunt sursele aflate la temperaturile T_1, respectiv T_2. Sarcini de lucru:

1. Stabiliți cu ajutorul cărui ciclu termodinamic cunoscut poate fi descris acest proces. Identificați natura fiecărei transformări descrise. [2 puncte]

2. Calculați căldura cedată de condensator în timpul transformării 3-4, Q_{34}, și lucrul electric total efectuat în timpul transformării. Lucrul electric este echivalent cu lucrul mecanic din punct de vedere termodinamic, iar denumirea diferită arată că acesta depinde de alte variabile decât lucrul mecanic, care depindea de presiune și volum. [2 puncte]

3. Reprezentați ciclul termodinamic într-un sistem de axe unde pe absicsă este reprezentată sarcina electrică de pe condensator, iar pe ordonată, diferența de potențial a armăturilor condensatorului. Dacă întâlniți transformări care nu pot fi considerate liniare, reprezentați-le sub forma unei curbe arbitrare. Precizați care transformări sunt liniare și care nu sunt. [2 puncte]

4. Considerați acum că $V_3 = V_2 + \mathrm{d}V$. Ce consecințe are această relație asupra reprezentării grafice precedente? [1 punct]

5. Calculați raportul $\mathrm{d}C/\,\mathrm{d}T$, folosindu-vă eventual de observațiile de la subpunctul precedent pentru a face aproximații rezonabile. [3 puncte]

Indicație: semnificația ariei delimitată de graficul funcției $V = V(q)$ și axele de coordonate este similară celei a ariei delimitate de graficul funcției $p = p(V)$ și axele de coordonate în reprezentările termodinamice uzuale.

Subiect propus de Andrei Marin, student la Facultatea de Fizică, Universitatea din București