Gauri negre si mici radioactivi

Guțoiu Alexandru

Barem

1 Gaura neagra

Pe parcursul acestei probleme veti presupune ca mecanica clasica functioneaza in totalitate (in cazul in care nu se precizeaza altceva in enunt), iar lumina este formata din particule numite fotoni, cu masa nenula ce se deplaseaza cu viteza luminii $c = 3 * 10^8 m/s^2$. Singura exceptie de la mecanica clasica va fi ca veti considera ca este imposibila depasirea vitezei luminii. Se conoaste constanta gravitationala G=$6.67 * 10^{-11} m^2 kg^{-1} s^{-2}$.

Vom defini o gaura neagra ca fiind un corp ce are un camp gravitational suficient de puternic cat sa nu lase fotonii sa scape din acesta.

a) Aproximati gaura neagra ca fiind o sfera cu densitate constanta. Ce raza maxima trebuie sa aiba un corp cu masa egala cu cea a soarelui ($M_S = 2 * 10^{30} kg$) pentru a fi considerat o gaura neagra?[2p]

Solutie:	
Se stie ca un foton nu poate parasi gaura neagra. Vom considera ca o particula de masa m ce are viteza luminii este lansata de la suprafata gaurii negre. Deoarece presupunem ca mecanica clasica functioneaza si la viteza luminii, energia particulei este $E_c = \frac{mc^2}{2}$	0.25p
Energia potentiala gravitationala pentru o sfera cu densitate constanta este: $E_p = -\frac{-GMm}{r}$	0.25p
Din conservare de energie si pentru ca particula sa nu poata scapa din campul gravitational, $E_c + E_p = 0$	0.5p
Inlocuind E_c si E_p si rezolvand ecuatia anterioara, obtinem: $r = \frac{2GM}{c^2}$	0.5p
Rezultat numeric: $r_s \approx 2964m$	0.5p
Aceasta marime se numeste "Raza Schwarzschild", iar in mod ironic, desi a fost ignorata total teoria relativitatii generale, valoarea obtinuta este cea corecta.	

b) Cum se modifica rezultatul de la a) in cazul unui corp ce are o densitate dependenta de distanta fata de centru $\rho = \rho(r)$, unde r este distanta de la centrul gaurii negre? Argumentati.[1p]

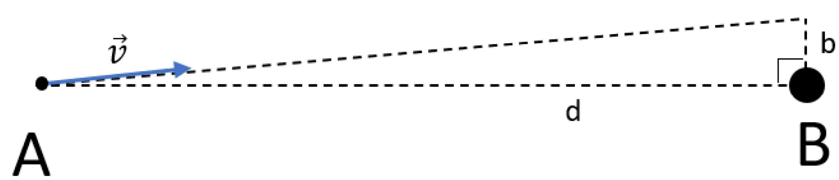
Solutie:	
Rezultatul nu se modifica	0.25p
Argumentare corecta din punct de vedere fizic.	0.75p

O racheta se afla la distanta d de o gaura neagra de masa M. Considerati gaura neagra ca fiind un punct material. La momentul initial racheta are viteza v fata de gaura neagra.

c) Considerati ca viteza rachetei este orientata pe directia gaurei negre, dar in sens opus. Care este valoarea minima v_{min} ce permite rachetei sa nu fie inghitita de gaura neagra.[2p]

Solutie:	
Cazul 1 $d \leq \frac{2GM}{c^2}$ Racheta nu mai poate scapa din gaura neagra	0.5p
Cazul 2 $d \geq \frac{2GM}{c^2}$ Pentru a scapa din gaura neagra, energia totala (potentiala+gravitationala) trebuie sa fie mai mare decat 0: $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{d} \geq 0$ $v \geq \sqrt{\frac{2MG}{d}}$ $v_{min} = \sqrt{\frac{2MG}{d}}$	1.5p

d) Considerati ca viteza rachetei este orientata sub un unghi $arctg(b/d)$, ca in figura de mai jos. Aflati valoarea minima a lui b pentru ca racheta sa scape din campul gravitational al gaurii negre, explicand si ce conditii trebuie sa fie respectate pentru a face aceasta posibila. La acest subpunct considerati ca racheta ar fi distrusa daca ar depasi viteza de c/10 la orice moment de timp. Nota: intr-o miscare a unui punct material in care apar doar forte centrale, momenul cinetic $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ se conserva, unde $\vec{r}$ si $\vec{p}$ reprezinta vectorul de pozitie, respectiv impulsul.[4p]



Solutie:	
Cazul 1 $d \leq \frac{200GM}{c^2}$ Racheta nu mai poate scapa din campul gravitational al gaurii neagre, fiind nevoita sa depaseasca viteza c/10 pentru aceasta	0.5p
Cazul 2 $d > \frac{200GM}{c^2}$ Fie $\vec{r}_m$= vectorul de pozitie al rachetei fata de gaura neagra la apropierea maxima $\vec{v}_m$=viteza rachetei la apropierea maxima Conditiile ca raheta sa scape din campul gravitational al gaurii negre sunt: $v_m < \frac{c}{10}$ si $E > 0$	0.5p
La apropiere maxima, $\vec{v}_m \perp \vec{r}_m$	0.5p
Folosind conservarea de moment cinetic, respectiv de energie, la momentul initial si la apropierea maxima: $dmv * \frac{b}{\sqrt{b^2+d^2}} = r_m m v_m$ $\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{d} = \frac{mv_m^2}{2} - \frac{GMm}{r_m}$	0.75p
Pentru cazul limita ca racheta sa nu fie distrusa, $v_m \approx \frac{c}{10}$	0.25p
De asemenea, pentru a scapa din campul gravitational este nevoie ca energia la momentul initial sa fie mai mare decat 0, dar viteza initiala sa nu fie mai mare decat c/10 $\sqrt{\frac{2MG}{d}} < v < \frac{c}{10}$	0.5p
Rezolvand sistemul, obtinem: $r_m = [\frac{1}{2MG}(\frac{c^2}{100} - v^2) + \frac{1}{d})]^{-1}$ $b = \frac{Ad}{\sqrt{1-A^2}}$, unde $A = \frac{r_m c}{10dv}$	1p