Probleme Be a Feynman

Andrei Marin

Noiembrie 2022

1 Transformare liniară

Un gaz ideal de exponent adiabatic $\gamma = 1,4$ parcurge o transformare liniară între stările A ($V_A = 10\ \mathrm{m}^3, p_A = 11000$ Pa) și B ($V_B = 110\ \mathrm{m}^3, p_B = 1000$ Pa). Calculați raportul dintre căldura totală schimbată de gaz pe parcursul transformării și căldura totală primită de gaz pe parcursul tranformării, cu trei zecimale.

1.1 Soluție

$$p = aV + b$$
$$a = \frac{p_B - p_A}{V_B - V_A} = -100\ \mathrm{Pa/m^3}$$
$$p_A = aV_A + b \implies b = p_A - aV_A = 12000\ \mathrm{Pa}$$

Gazul primește căldură până în punctul de tangență cu adiabata.
Condiția ca o dreaptă să fie tangentă la o politropă impune ca acestea să se intersecteze într-un singur punct, cu alte cuvinte, ca ecuația ce descrie intersecția lor să aibă o singură soluție (pentru o politropă netangentă care intersectează dreapta, ecuația va avea exact două soluții). Vom scrie ecuația generală pentru intersecție, considerând politropa de forma $pV^n = \delta$.

$$(aV + b)V^n = aV^{n+1} + bV^n = \delta \tag{1}$$

Condiția de tangență presupune ca dreapta în cauză să coincidă cu derivata politropei în raport cu volumul, considerată în punctul de tangență. Derivând ecuația politropei în raport cu volumul se obține următoarea relație:

$$npV^{n-1} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}V^n = 0$$

În care putem înlocui cu formula presiunii de pe transformarea noastră liniară (aceasta fiind condiția de identitate a dreptelor):

$$n(aV + b)V^{n-1} + aV^n = (n+1)aV^n + nbV^{n-1} = 0 \tag{2}$$

Observație: aceeași ecuație se obține derivând direct ecuația (1). Acum vom rezolva ecuația (2), obținând soluțiile:

$$\begin{cases} V_n = \dfrac{-bn}{a(n+1)} \\ p_n = \dfrac{b}{n+1} \end{cases}$$

Noi avem $n = \gamma$, deci:

$$\begin{cases} V_\gamma = 70 \text{ m}^3 \\ p_\gamma = 5000 \text{ Pa} \end{cases}$$

Deoarece $\gamma = C_p/C_V$, iar $C_p - C_V = R$, putem scrie $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$=2,5R.
Gazul primește căldură până în punctul de tangență, iar apoi cedează căldură. Cantitatea totală de căldură schimbată este:

$$L_{AB} = (p_A - p_B)(V_B - V_A)/2 = 500000 \text{ J}$$

$$\Delta U_{AB} = \frac{C_V}{R}(p_B V_B - p_A V_A) = 0$$

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = 500000 \text{ J}$$

Cantitatea totală de căldură primită este:

$$L = (p_A - p_\gamma)(V_\gamma - V_A)/2 = 180000 \text{ J}$$

$$\Delta U_{AB} = \frac{C_V}{R}(p_\gamma V_\gamma - p_A V_A) = 600000 \text{ J}$$

$$Q = L + \Delta U = 780000 \text{ J}$$

Raportul cerut este $f \approx 0,641$.

2 Perturbație a câmpului gravitațional

Un cercetător dorește să măsoare perturbația câmpului gravitațional în preajma unui minereu de galenă. Acesta dispune de un pendul cu lungime $l = 25$ cm și un cronometru cu senzor care afișează perioada pendulului cu trei zecimale. Accelerația gravitațională obișnuită este $g_0 = 9,81$ m/s^2 Se consideră erorile de măsură și erorile statistice neglijabile, adică rezultatul afișat de aparat este valoarea reală a perioadei. Se va lucra în aproximația micilor oscilații. Calculați diviziunea minimă a instrumentului rezultat în m/s^2 (intervalul dintre două valori succesive care pot fi măsurate). Se știe că în cazul unei funcții de o singură variabilă $y = y(x)$ se poate scrie următoarea relație între variații mici (cum sunt diviziunile unui instrument): $\delta y = |f'(x)|\delta x$.

2.1 Soluție

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Prin aproximarea diferențialei cu o variație mică se obține:

$$\delta T = -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\delta g$$

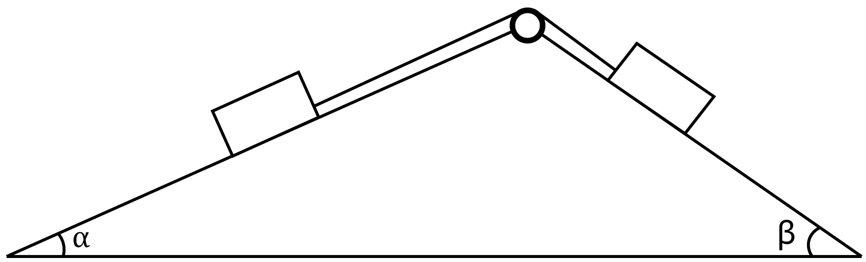
$$|\delta g| \approx \frac{g_0^{3/2}}{\pi\sqrt{l}}\delta T$$

Din precizia aparatului știm $\delta T = 0,001$ s, deci:

$$|\delta g| \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

3 Alunecare pe plan înclinat

Două corpuri având aceeași greutate sunt așezate pe două plane înclinate lipite. Planele au aceeași înălțime și formează cu orizontala unghiuri diferite, necunoscute. Cele două corpuri sunt legate cu un fir trecut peste vârful comum al celor două plane. Coeficientul de frecare dintre corpuri și plane este $\mu = 0,3$, același pentru ambele plane. Știind că cele două corpuri sunt la limita lunecării, care este diferența dintre unghiurile de înclinare ale celor două plane (în grade, cu trei zecimale)?



3.1 Soluție

Condiția de echilibru la limita lunecării se scrie:

$$G\sin\beta = \mu G\cos\beta + G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha$$

De unde:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \mu = \operatorname{tg}\varphi$$

Aici φ este unghiul de frecare. Deci:

$$\beta - \alpha = 2\varphi = 2\operatorname{arctg}\mu = 33,398^\circ$$

4 Sistem optic

O lentilă biconcavă este așezată astfel încât unul dintre focarele sale să coincidă cu polul (vârful) unei oglinzi concave. Sistemul, așezat în aer, formează imagini reale pentru orice obiect așezat în fața lentilei (care are lentila și oglinda de aceeași parte). Știind că razele de curbură ale oglinzii și ale lentilei sunt egale, aflați indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila.

4.1 Soluție:

Razele provenite de la obiect trec prin lentilă, se reflectă pe oglindă, apoi trec iar prin lentilă.
Lentila divergentă dă imagini virtuale pentru surse reale, deci sursa sa, adică imaginea obținută după reflexia pe oglindă, este virtuală, adică situată de partea lentilei opusă oglinzii. Ecuația lentilei se va scrie pentru a doua reflexie astfel:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_l}$$

$$x_2 = \frac{x_1 f_l}{x_1 + f_l}$$

Cum $x_2 > 0$ (imagine reală) și $f_l < 0$ (lentilă divergentă), avem $0 < x_1 < |f_l|$.
Vom scrie mai întâi ecuația lentilei. Folosim convenția carteziană și alegem drept sens pozitiv de fiecare dată sensul de la obiect la elementul optic. Ecuația lentilei se scrie (notațiile de mai sus au doar rol demonstrativ și sunt folosite cu altă semnificație în cele ce urmează):

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_l}$$

$$x_2 = \frac{x_1 f_l}{x_1 + f_l}$$

Ecuația oglinzii se scrie:

$$\frac{1}{x_2 - f_l} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{f_o}$$

Punem condiția ca $|x_3|$ să se afle între $|f_l|$ și $|2f_l|$ de oglindă (echivalentă cu condiția pe care am pus-o mai sus pentru lentilă). Știm, de asemenea, $x_3 < 0$.

$$\frac{1}{2|f_l|} \leq \left| \frac{1}{f_o} - \frac{1}{x_2 - f_l} \right| \leq \frac{1}{|f_l|}$$

Cum $f_l, f_0, x_2 < 0$, rescriem:

$$\frac{1}{2|f_l|} \leq \frac{1}{|f_o|} - \frac{1}{|x_2 - f_l|} \leq \frac{1}{|f_l|}$$

Din ecuația pentru x_2, punând succesiv $x_1 \to 0$, respectiv $x_1 \to -\infty$, avem:

$$f_l \leq x_2 \leq 0$$

De unde:

$$|f_l| \leq |x_2 - f_l| \leq 2|f_l|$$

Sau:

$$\frac{1}{2|f_l|} \leq \frac{1}{|x_2 - f_l|} \leq \frac{1}{|f_l|}$$

$$\frac{1}{2|f_l|} + \frac{1}{|x_2 - f_l|} \leq \frac{1}{|f_o|} \leq \frac{1}{|f_l|} + \frac{1}{|x_2 - f_l|}$$

Deci:

$$\frac{1}{2|f_l|} + \frac{1}{|f_l|} \leq \frac{1}{|f_o|} \leq \frac{1}{|f_l|} + \frac{1}{2|f_l|}$$

Avem: $|f_o| = \frac{2|f_l|}{3}$ sau $\frac{1}{|f_o|} = \frac{3}{2|f_l|}$. DIn formulele distanțelor focale pentru cele două elemente optice avem:

$$\frac{2}{|R|} = \frac{3}{2}(n-1)\frac{2}{|R|}$$

$$n - 1 = \frac{2}{3} \implies n = 1.666$$

5 Lespedea de aur de 1700 de tone

Într-o galerie de la Roșia Montană s-a găsit o lespede de aur de 1700 de tone. Manevrarea acesteia implică însă unele dificultăți. Se dorește ridicarea lespezii folosind un cablu cilindric de oțel de diametru $D = 10$ cm, cu un modul de elasticitate Young $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2. Lungimea nedeformată a cablului este $L = 80$ m. Densitatea oțelului este $\rho_o = 7850$ kg/m^2.

1. Calculați alungirea (în metri) a cablului sub acțiunea propriei greutăți, în regimul de aplicare a legii lui Hooke.

2. Calculați alungirea relativă în procente a cablului sub acțiunea lespezii. Deoarece forța exercitată asupra cablului depășește domeniul de elasticitate liniară, considerați următoarea formulă pentru calculul forței în locul legii lui Hooke: $F = ES\frac{\Delta L}{L+\Delta L}$. Aici S este secțiunea transversală inițială a cablului, iar ΔL este alungirea. Neglijați alungirea cablului sub acțiunea propriei greutăți.

5.1 Soluție:

Legea Hooke:

$$\Delta L = \frac{FL}{ES} \implies k = \frac{ES}{L}$$

Putem modela cablul ca un cablu ideal de lungime $L/2$ și $k' = 2k$, având masa cablului real atașată. Deci:

$$\Delta L_0 = \frac{L}{2ES}\rho_o \pi \frac{D^2}{4} Lg = \frac{L^2}{2E}\rho_o g = 0,00123 \text{ m}$$

Apoi, din rezolvarea numerică a ecuației $mg = ES\frac{\Delta L}{L+\Delta L}$:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = 1,07\%$$

6 Efect Doppler

O planetă orbitează în jurul unei stele de masă $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Direcția Pământ-Stea coincide cu semiaxa mare a orbitei planetei. Lungimea acesteia este $a = 150 \cdot 10^6$ km. Excentricitatea orbitei este $e = 0,2$ De pe planetă se emite un puls cu lungimea de undă $\lambda_0 = 700$ nm. Care este lungimea de undă maximă recepționată pe Pământ (în nanometri, cu trei zecimale)? Se cunosc: constanta atracției universale $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2, viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Se știe că poziția planetei pe distanța de la focarul elipsei la planetă este dată de formula $r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$. Cazul $\theta = 0$ corespunde apropierii minime dintre stea și planetă. Se știe că energia totală a sistemului stea-planetă este $E = -\frac{KMm}{2a}$, unde m este masa planetei. Se știe relația dintre variația lungimii de undă a undei electromagnetice și viteza relativă a sursei de-a lungul direcției de observare, conform efectului Doppler clasic: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$.

6.1 Soluție

Abatere maximă înseamnă viteză către Pământ (paralelă cu semiaxa mare) maximă, adică accelerație perpendiculară pe această direcție (și pe semiaxa mare). Cazul căutat este deci $\theta = \pi/2$. Avem

$r' = a(1-e^2)$. Scriem conservarea momentului cinetic:

$$r(0)v = r'v'_x \implies v'_x = r(0)v/r' = \frac{v}{1+e}$$

Din conservarea energiei scriem v, viteza la $\theta = 0$, unde $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e)$:

$$-\frac{KMm}{2a} = -\frac{KMm}{a(1-e)} + \frac{mv^2}{2}$$

Prin efectuarea calculelor se ajunge la:

$$v'_x = \frac{1}{1-e^2}\sqrt{\frac{KM}{a}}$$

Deci:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v'_x}{c} \implies \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0\left(1 + \frac{v'_x}{c}\right) = 700.072 \text{ nm}$$

7 Ciocniri și căldură

Dorel dorește să-și construiască un accelerator de particule. Cum nu are posibilitatea de a lucra cu particule la scară atomică și subatomică, el folosește biluțe de plumb de rază $R = 1$ cm și densitate $\rho = 11300$ kg/m^3. Acceleratorul constă din două lansatoare aflate la distanța $D = 20$ m, care imprimă celor două bile viteza inițială v_0, orientată la unghiul α față de orizontală. Bilelele se ciocnesc în punctul în care viteza lor este orientată orizontal. Cunoscând căldura specifică a plumbului $c = 125$ J/(kg $\cdot$ K) și căldura sa latentă de solificare $\lambda = 25$ kJ/kg, calculați la ce unghi (în grade, cu trei zecimale) trebuie orientată viteza astfel încât căldura degajată în urma ciocnirii bilelor să le topească în întregime. Temperatura inițială a bilelor este $t_0 = 25°$C, iar plumbul se topește la $t = 327,3°$C.

7.1 Soluție

Introducem $m = \rho\frac{4\pi R^3}{3}$ Condiția din problemă echivalează cu ciocnirea bilelor la înălțime maximă, adică la jumătate din bătaie. Deci bătaia bilelor este D. Din gormula bătăii obținem $v_0^2 \sin 2\alpha = gD$. Căldura degajată într-o ciocnire plastică este în general: $Q = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{v_{rel}^2}{2}$ și în cazul nostru $Q = \frac{m}{2}\frac{(2v_0\cos\alpha)^2}{2} = mv_0^2\cos^2\alpha$. Dar, pentru topire, avem $Q = 2mc(t-t_0) + 2m\lambda$. Putem deci scrie, prin combinarea formulelor anterioare:

$$\frac{mgD}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cos^2\alpha = 2mc(t-t_0) + 2m\lambda$$

Atunci:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mgD}{4mc(t-t_0) + 4m\lambda}$$

Se obține soluția $\alpha = 0,04476°$.

8 Încălzirea acvariului

Apa dintr-un acvariu este menținută la un nivel constant cu ajutorul unui sistem de două încălzitoare de putere maximă $P = 200$ W. Acvariul este alimentat cu apă rece la temperatura $t_r = 10°$C, astfel încât aceasta să compenseze căldura introdusă de încălzitoare, iar temperatura de echilibru să fie $t = 30°$C. Se consideră că omogenizarea apei din interiorul acvariului se produce foarte rapid. Prin conectarea ambelor încălzitoare în paralel, debitul cu care apa este recirculată este de $n = 3$ ori mai mare decât dacă am conecta un singur încălzitor. Aflați debitul necesar în cazul legării încălzitoarelor în serie. Se consideră că în ambele cazuri încălzitoarele sunt conectate la aceeași sursă de tensiune.

8.1 Soluție

$$\Delta t = t - t_r$$

Deoarece temperatura acvariului este constantă, pierderile de căldură spre exterior vor fi constante. Atunci, putem scrie ecuațiile:

$$P = mc\Delta t + q_{ext}$$

pentru cazul unui singur încălzitor și

$$2P = nmc\Delta t + q_{ext}$$

Deci $q_{ext} = P\frac{n-2}{n-1}$. La legarea în serie avem $P_s = \frac{U^2}{2R} = P/2$, deci:

$$\frac{P}{2} = m_s c\Delta t + P\frac{n-2}{n-1}$$

$$m_s = \frac{P}{c\Delta t}\frac{3-n}{2(n-1)} = 0$$

În acest caz, înclzitoarele acoperă exact pierderile de căldură spre exterior și nu mai este necesară introducerea de apă rece.

9 Gaură neagră în sistemul solar

Ce rază (în kilometri) ar trebui să aibă o gaură neagră introdusă pe direcția Soare-Pământ, în dreptul orbitei lui Jupiter, astfel încât Pământul să se afle față de Soare unde se află acum Marte, pe o traiectorie stabilă? Se consideră rotația sincronă a Pămânutlui și a găurii negre. Raza unei găuri negre care nu se rotește în jurul axei proprii (vom considera o astfel de gaură neagră) este dată de formula lui Schwarzschild: $R_S = \frac{2KM}{c^2}$. Se cunosc: constanta atracției universale $K = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\cdot$ m^2/kg^2, viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, distanța Soare-Marte $r' = 228 \cdot 10^6$ km, distanța Soare-Jupiter $R = 778 \cdot 10^6$ km. Toate orbitele se consideră circulare. Masa Soarelui este $M_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Distanța actuală dintre Soare și Pământ este de $1,5 \cdot 10^6$ km.

9.1 Soluție

Introducem $r = R - r'$ distanța de la gaura neagră la Pământ pe noua lui orbită. Observăm că Pământul ar fi mai aproape de gaura neagră decât de Soare, deci accelerația sa centripetă va fi orientată către gaura neagră. Echilibrul forțelor conduce la ecuația:

$$\frac{mv^2}{R-r} = -\frac{KmM_1}{(R-r)^2} + \frac{KmM_2}{r^2}$$

Perioada de rotație trebuie să fie egală cu perioada sistemului, pe care o obținem din mișcarea centrului de masă. Avem $r_{cm} = \frac{M_1 R}{M_1+M_2}$ față de gaura neagră și aplicăm legea a treia a lui Kepler în forma care cuprinde masele corpurilor: $\omega^2 = \frac{K(M_1+M_2)}{a^3}$. Prin efectuarea înlocuirilor se ajunge la:

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} - \frac{M_2}{r^2} = \left(\frac{M_1 R}{M_1+M_2} - r\right)\frac{M_1+M_2}{R^3}$$

Se obține din ecuația de mai sus M_2, care se înlocuiește în formula razei Schwarzschild. În final se obține: $R_S = 26.003$ km.