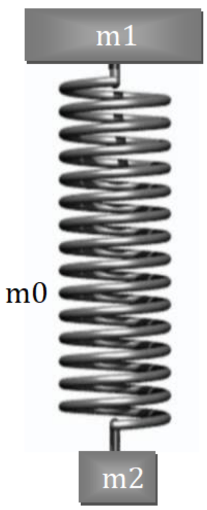
Sol BaF 2022

Catana Diana

Dec 3, 2022

1 1.

Sistemul e format din 3 parți : corpul de masă m1, resort de lungime inițială l (resort nedeformat) cu N spire si masă m0 si corpul de masă m2. Studiul oscilațiilor acestui sistem se poate diviza in 3 parți.



I. Mai intâi vom analiza contribuția resortului la oscilațiile sistemului. Studiem, așadar, contribuția masei acestuia la oscilațiile armonice ale sistemului. În acest model un corp e fix, iar celălălt oscilează liber împreuna cu resortul.

Mișcarea sistemului oscilant e descris de o pulsatie ω data (pe care noi o vom calcula ulterior) si o valoare a amplitudinii A.
Consideram o porțiune y de resort și a amplitudinea extremității sale.

Deci $a = A\frac{y}{l}$.
Notăm cu j numărul de spire din porțiunea de lungime y, așa că $a = A\frac{j}{N}$,
Cum contribuția masei resortlui se găsește în energia cinetică a sistemului, vom calcula energia cinetică a resortului Ecr care este suma energiilor cinetice a fiecarei spire.
$Ecr = \sum_j^N \frac{m0\omega^2 a^2}{2N}$
care devine:
$Ecr = \frac{m0\omega^2 A^2}{2N^3} \sum_j^N j^2$.

Folosind hintul cu suma si limita, avem:

$Ecr = \frac{m0\omega0^2 A^2}{6}$, deci contribuția masei resortului este $mr = \frac{m0}{3}$.

II. Vom analiza contribuția resortului și masei m2 atârnate de acesta la energia cinetica totală a sistemului, energia celor 2 fiind Ecr2.

$Ecr2 = \frac{m0\omega 0^2 A2}{6} + \frac{m2\omega 0^2 A2}{2}$ care mai poate fii scrisa ca $Ecr2 = \frac{me\omega 0^2 A2}{2}$, unde $me = \frac{m0}{3} + m2$ este masa echivalentă a celor 2 componente.

III. De acum avem un nou sistem echivalent, corpul de masă m1, și ansamblul de corpuri (resort și corpul de masa m2) cu masă me. Pentru noul sistem echivalent avem de-a face cu un caz clasic de oscilații, în care se introduce mărimea cunoscută drept masa redusă a sistemului:

$u = \frac{m1me}{m1+me}$, care se deduce din legile de mișcare a corpurilor ce alcătuiesc noul sistem echivalent.

$\begin{cases} -\mathrm{d}^2 x1 \frac{}{dt^2}\ \mathrm{m1} = -kx1 + kxe \\ -\mathrm{d}^2 xe \frac{}{dt^2}\ \mathrm{me} = -kxe + kx1 \end{cases}$ unde x1, xe sunt coordonatele de poziție ale corpului de masa m1, respectiv me la un anumit timp t în cadrul oscilației. Pentru mișcarea armonică se impune ca $-\frac{d^2x1}{dt^2} = -\omega^2 x1$ si $-\frac{d^2xe}{dt^2} = -\omega^2 xe$.

Deci $\omega = \sqrt{\frac{k(m1+me)}{m1me}} = \sqrt{\frac{k(m1+\frac{m0}{3}+m2)}{m1(\frac{m0}{3}+m2)}}$.

Numeric, $\omega = 22.821 rad * s^{-1}$.

2 2.

Pentru un sistem oscilant cu componente cuplate în paralel avem că atât constanta elastică echivalentă cât și modulul Young echivalent Ee (pe care trebuie sa îl aflăm) se calculeaza ca suma acestor parametri specifici fiecărei componente (cilindru elastic si resort) în parte. Astfel:

Ee = Er + E, under Er, E sunt modulele Young ale resortului și respectiv a cilindrului.

Pentru resortul fără masă (considerat ideal), folosind legea lui Hooke, avem ca $Er = \frac{kL}{2S}$. Ne rămâne să aflăm E. Pentru aceasta vom analiza oscilațiile sistemului cilindru + resort, a căror perioadă T a micilor oscilații o cunoaștem.

Vom aborda așa-numită "variantă energetică" a studiului oscilațiilor.

I.Fie Ecc= energia cinetică a cilindrului în urma unei deformări mici x (dx) cu rata de dilatare γ.

$Ecc = \frac{J\gamma^2}{2}$, unde J=momentul de oscilație a șurubului față de discul față de care e suspendat iar $\gamma = \frac{d\epsilon}{dt}$. Folosind hintul, avem că:

(1) $Ecc = \frac{mL^2\gamma 2}{24} = Ec$, care corespunde energiei cinetice totale Ec a sistemului deoarece resortul e considerat ideal(fără masă) și acesta nu contribuie decât la energia potențială elastică a sistemului.

II. Fie Epc si Epr energiile potențiale elastice ale cilindrului elastic, respectiv a resortului.
Introducem acum constanta de elasticitate a cilindrului $kc = \frac{ES}{L}$.

Pentru deformarea cu x avem ca: $Epc = \frac{kcx^2}{2}$
Stiind ca $S = \frac{m}{\rho L}$ si ca $x = \epsilon L$, putem scrie:

(2) $Epc = \frac{mE\epsilon^2}{2\rho}$

Acum vom calcula expresia energiei potențiale elastice a resortului. Bineînțeles, aceasta este:
(3) $Epr = \frac{k\epsilon^2 L^2}{2}$

Din (2)+(3) ne rezultă energia potențială elastică totală a sistemului Ep.

(4) $Ep = Epc + Epr$

Prin împarțirea relațiilor (4)/(1) și, amintindu-ne că $\gamma = \frac{d\epsilon}{dt}$ gasim ca:

$\omega^2 = 12(\frac{E}{\rho L^2} + \frac{k}{m})$, deci

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{12(\frac{E}{\rho L^2} + \frac{k}{\rho SL})}$
De aici, scoatem modulul Young E al cilindrului:

$E = (\frac{\pi^2}{3T^2} - \frac{k}{\rho SL})\rho L^2$

Acum putem găsi Ee:

$Ee = (\frac{\pi^2}{3T^2} - \frac{k}{\rho SL})\rho L^2 + \frac{kL}{2S} = \frac{\pi^2 \rho L^2}{3T^2} - \frac{kL}{2S}$

Înlocuind numeric avem:

Ee=568,7 Pa.

3 3.

Analogia mecano-electrică constă în:
1. q $\longrightarrow$ m
2. j $\longrightarrow$ Z
$j = \frac{I}{S} = \frac{\Delta q}{\Delta t S}$
Deci, $Z \longrightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t S}$
Din analiza dimensională, avem :

(1) $[Z]si = kg * s^{-1} * m^{-2}$

(2) $Z = \rho^\alpha E^\beta$, este impedanța acustică in funcție de densitatea mediului și modulul său Young.

(3) $[\rho]si = kg * m^{-3}$

(4) $[E]si = kg * m^{-1} * s^{-2}$

Din (1),(2),(3),(4) rezultă că $kg * s^{-1} m^{-2} = (kg^\alpha * m^{-3\alpha})(kg^\beta * m^{-\beta} * s^{-2\beta})$
De aici vom forma sistemul:

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -1 = -2\beta \\ -2 = -3\alpha - \beta \end{cases}$$ Soluțiile acestui sistem sunt: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

Deci $Z = \sqrt{\rho E}$
Numeric $Z = 1.697 * 10^4 kg * s^{-1} * m^{-2}$

4 4.

Avem 2 situații privind evoluția mișcării unei picături: (1) cădere liberă și (2) urcare sub acțiunea câmpului electric generat între cei 2 electrozi.
Scriem legile de mișcare pentru fiecare situație în parte, ținând cont de faptul că viteza terminală, care se atinge în momentul în care accelerația rezultantă este 0, se atinge instantaneu (vezi hint). Mișcarea se face doar pe verticală.

(1)G-FA-F1=0, unde G, FA, F sunt modulele greutății, forței arhimedice si forței de frecare la coborâre/în cădere (forta Stokes).

(2)Fe-G+FA-F2=0, analog, cu precizarea că Fe este modulul forței electrice si F2 forța de frecare la urcare.
Deci:

(1) $(\rho - \rho 0)V = kv1$

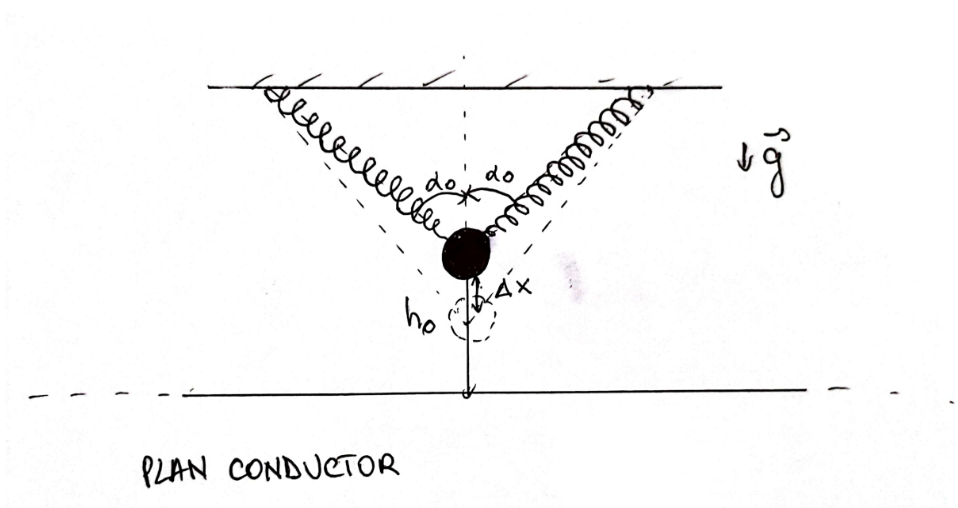
(2) $q\frac{U}{h} - (\rho - \rho 0)V = kv2$, V fiind volumul constant al picăturii iar intensitatea E a câmpului electric dintre electrozi care apare in expresia forței electrice Fe=qE devine $E = \frac{U}{h}$.

(3) De asemenea avem : $v1 = \frac{h}{t1}$ (folosind hintul), picătura coboară pe distanța h cu viteza v1, necunoscută, în timpul t1. Analog, $v2 = \frac{h}{t2}$.
Din (1)+(2) și folosindu-ne de relația 3 rezultă:

$q\frac{U}{h} = kh(\frac{1}{t1} + \frac{1}{t2})$
Deci sarcina specifică $\frac{q}{m}$ devine:

$\frac{q}{m} = \frac{h^2}{U}\frac{k}{m}(\frac{1}{t1} + \frac{1}{t2})$
Cunoscând toți parametrii de mai sus (si calculând mai întâi masa picăturii $m = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$), ajungem la urmatoarea valoare numerică:
$\frac{q}{m}$ = 1.456*10^3 C/kg

5 5.



Aplicând principiul II al mecanicii pentru componentele forțelor ce acționează asupra corpului în cazul în care sarcina este deplasată pe distanța x în jos, avem :

ma = m$\frac{d^2x}{dt^2}$ = -mg + 2k(x+Δl0)cos$^2\alpha$ + $\frac{q^2}{16\pi\epsilon(h0-x)^2}$, unde Δl0 este dilatarea resortului corespunzatoare pozitiei echilibrului mecanic initial.

Folosind Teorema lui Pitagora generalizată, din triunghiul format de resorturile dilatate, avem:

$l^2 = x^2 + l0^2 + 2xl0cos\alpha 0$, x << l0, rezulta
$l^2 = l0^2 + 2xl0cos\alpha 0$, deci folosind inegalitatea lui Bernoulli l = l0(1+ $\frac{xcos\alpha 0}{l0}$)
De aici se explică de ce forța elastică pe direcția verticală este:

Fe=2k(l-l0-$\Delta l0$)cos$^2\alpha$,unde $\alpha - \alpha 0 \longrightarrow 0$
De aici rezultă :
m$\frac{d^2x}{dt^2}$ = -mg + 2k(x+$\Delta l0$)cos$^2\alpha$ + $\frac{q^2}{16\pi\epsilon h0^2}$(1 - $\frac{2x}{l0}$)

Din condiția de echilibru se știe că mg - k$\Delta l0$cos$^2\alpha 0$ + $\frac{q^2}{16\pi\epsilon h0^2}$ = 0, deci

m$\frac{d^2x}{dt^2}$ = 2kxcos$^2\alpha 0$ - $\frac{q^2}{16\pi\epsilon h0^3}$ x, o ecuație de tip armonic din care extragem pulsația

$\omega = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon mho^3} - \frac{2kcos^2\alpha 0}{m}}$

Înlocuind numeric vom avea ca ω=25,15 rad*s^{-1}

6 6.

a. F = uv = $\frac{dm}{dt}$v, este forța exercitată de rotor asupra aerului (respectiv de aer asupra rotorului)
$\frac{dm}{dt}$ = u = ρS(v1 - v2), pentru sectiunea tubului de curent pri care curge aerul cu debit masic constant in timp u.
Vom itera 2 definitii ale puterii pe care le vom utiliza pentru a afla v1.

(1) P = Fv = ρSv^2(v1 - v2)

(2) P = $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ = $\frac{1}{2}\rho$Sv(v1^2-v2^2), de aici ridicam relatia (2) la patrat si o impartim la relatia (1) si avem ca:

P=$\frac{1}{4}\rho$S(v1+v2)^2(v1-v2), dar $\frac{v2}{v1}$ = a deci

P=$\frac{1}{4}\rho$Sv1(1+a)^2(1+a)

v1 = $[\frac{4P}{\rho S(1+a)^2(1+a)}]^{\frac{1}{3}}$, iar numeric v1 = 12,9 m/s.

b. v2 = a*v1
Din (1) si (2) reiese ca v =$\frac{v1+v2}{2}$, deci v = 8,6 m/s (viteza la nivelul rotorului).

7 7.

Problema se reduce la una de optimizare spatiala (optimizare geometrica) si apoi la una de numarare.

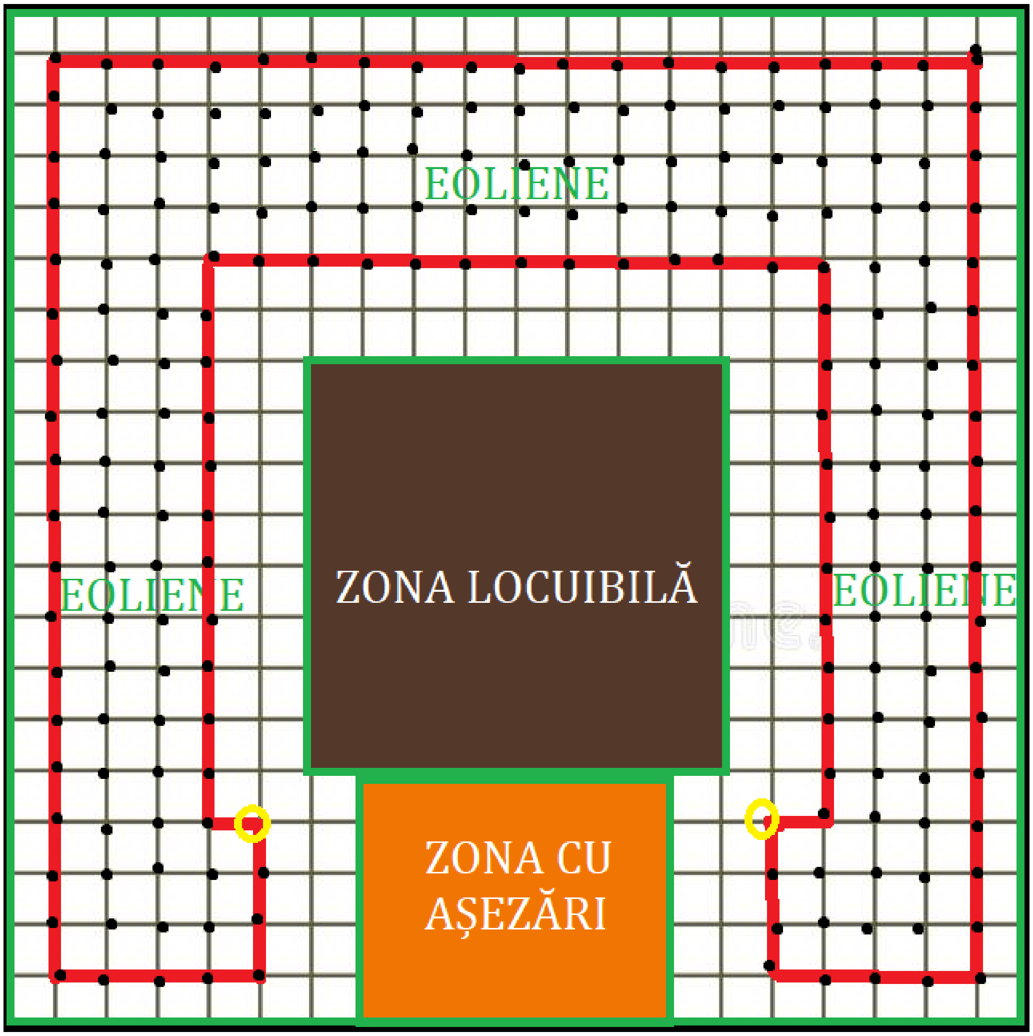
Trebuie gasita geometria necesara dispunerii spatiale a eolienelor care asigura respectarea tuturor cerintelor si dispunerea unui numar maxim de eoliene.

Este intuitiv si usor de observat (folosind hintul) ca aceasta configuratie corespunde aseazarii a cate unei eoliene in varfurile unui patratel pana la umplerea spatiului disponibil cu eoliene.

In desenul de mai jos, suprafata delimitata de linii rosii, respectic liniile rosii, corespunde spatiului disponibil dispunerii eolienelor. **Fiecare eoliană este reprezentată de un punct negru aflat în vârful unui pătrățel.**

Observație: există 2 vârfuri (cercuri cu cotur galben) în care nu pot fii dispuse eoliene deoarece nu ar fii respectate restricțiile.

Se deduce ca numarul maxim de eoliene este N=213.



8 8.

Pentru a scrie ecuatia de miscare a unui electron, introducem mai intai o acceleratie gravitationala echivalenta g* care reiese din actiunea celor 2 campuri, gravitational si electric ale caror intensitati sunt antiparalele ($\vec{g}||\vec{E}$).
$g* = g + \frac{eE}{m}$
Din teoria balistica se deduce ecuatia parabolei:
$y = xtg\theta - \frac{1}{2}\frac{g*^2x^2}{v0^2cos^2\theta}$, unde deja am inlocuit g cu g*, iar θ este unghiul de lansare.
Inaltimea maxima la care ajunge electronul fata de punctul de lansare este $ym = \frac{v0^2sin2\theta}{2g*}$.
Stiind ca $sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$, relatia aneterioara devine:

$ym = \frac{v0^2(1-cos2\theta)}{4g*}$ (1)
Distanta maxima atinsa de corp este :
$xm = \frac{v0^2sin2\theta}{2g*}$ (2)

Folosim (1) si (2) pentru a gasi expresiile $sin2\theta$ si $cos2\theta$ si apoi le inlocuim in bine-cunoscuta relatie $sin^22\theta + cos^22\theta = 1$. De aici rezulta:

$(\frac{2xmg*}{v0^2})^2 + (1 - \frac{4ymg*}{v0^2})^2 = 1$ (3)

(3) este ecuatia elipsei cautate de noi, pe care mai simplu o putem scrie astfel :
$\frac{xm^2}{a^2} + \frac{(ym-b)^2}{b^2} = 1$, unde $a = \frac{v0^2}{2g*}$ este semiaxa mare a elipsei si $b = \frac{v0^2}{4g*}$ este semiaxa mica a elipsei.

Din desen se observa ca latus rectum are lungimea $l = \frac{2b^2}{a}$. Inlocuind a si b, rezulta :

$l = \frac{v0^2}{4g*} = \frac{v0^2}{4(g+\frac{eE}{m})}$

Numeric (avand in minte observatia imediat calculabila ca $g << \frac{eE}{m}$) avem ca l = 6.82 mm.

9 9.

a. Fie v = viteza de rotatie aparenta a componentei B in jurul componetei A.
Urmarind figura, reiese ca:

(1) 2(R1+R2) = vt1

(2) 2(R1-R2) = vt2

Prin impartirea relatiilor (1) si (2) ne rezulta in cele din urma ca :

$\frac{R2}{R1} = \frac{t1-t2}{t1+t2}$

Numeric, $\frac{R2}{R1} = 0.387$

b. Fata de centrul de masa al sistemului, momentul rezultant al fortelor este 0. Avem deci:

M1r1=M2r2, M1,M2 masele componentelor si r2,r2 razele orbitelor

Cum d >> r1,2 folosim aproximatia $sin\theta \longrightarrow tg\theta \longrightarrow \theta$ si gasim raza orbitelor in functie de unghiurile de observatie a acestora si distanta d fata de Terra:
r1=dθ1 si r2=dθ2
.

Deci, $\frac{M2}{M1} = \frac{r1}{r2} = \frac{\theta 1}{\theta 2}$

Dar $\frac{M2}{M1} = \frac{\rho 2}{\rho 1}\frac{R1^3}{R2^3}$, asa ca rezulta:

$\frac{\rho 2}{\rho 1} = \frac{R1^3}{R2^3}\frac{\theta 1}{\theta 2}$
Utilizand rezultatul de la subpunctul a, avem ca:

$\frac{\rho 2}{\rho 1} = \frac{(t1+t2)^3}{(t1-t2)^3}\frac{\theta 1}{\theta 2}$
Numeric, $\frac{\rho 2}{\rho 1} = 0.517$.