Rezolvare - Octavian

octavianc27

November 2022

1 Codul binar

Pentru a transmite un bit cu valoarea 0 nu este necesară energie.
Energia necesară pentru a transmite un bit cu valoarea 1 este

$$E_1 = \frac{U^2}{R}\Delta t$$

Adică, $E_1 = 2.5 \cdot 10^{-5} J$.
Numărul dat se poate reprezenta în baza binară ca 10100001011111000101100001111011 1, reprezentare ce are $n = 18$ biți cu valoarea 1.
Deci, energia totală necesară este

$$E = n \cdot E_1$$

Adică $E = 4.5 \cdot 10^{-4} J = 0.45 mJ$

2 Cubul de gheață

Energia necesară pentru a topi cubul de gheață de masă m este:

$$E = \lambda_{gheață} * m$$

Puterea necesară pentru a mișca cubul, transformată prin frecare în căldură, este:

$$P = \mu N v$$

unde μ este coeficientul de frecare, N forța normală de apăsare iar v, viteza cubului.

Timpul până la topirea cubului poate fi calculat ca

$$\Delta t = \frac{E}{P - W_0}$$

unde W_0 este puterea cedată suprateței.

Distanța parcursă de cub până la topire este astfel:

$$d = v\frac{\lambda_{gheață} * m}{\mu N v - W_0}$$

Adică $d = 1113.33m$.

3 Dacul de zece metri

Din rațiuni dimensionale obținem volumul pulmonar al uriașului ca

$$V_{dac} = V_{om} r^3$$

unde r este raportul dintre înălțimea uriașului dac și cea a omului.
Cantitatea de aer care va trece într-o zi prin plămânii dacului va fi, ținând cont că frecvența respiratorie rămâne constantă,

$$M_{dac} = M_{om} * r^3$$

Pe același raționament, dimensiunea traheei dacului uriaș va fi

$$d_{dac} = d_{om} r$$

Putem calcula viteza medie a aerului prin traheea omului ca

$$v_{om} = \frac{4M_{om}}{\pi d_{om}^2}$$

Prin traheea dacului, aceasta va fi

$$v_{dac} = v_{om}\frac{r^3}{r^2}$$

$$v_{dac} = r * \frac{4M_{om}}{\pi d_{om}^2}$$

Adică

$$v_{dac} = 4.1168m/s$$

4 Omul beat

Presupunem că "eliberăm" un număr N foarte mare de oameni beți în acest experiment. Deoarece fiecare om se poate deplasa în ambele direcții distanțe egale cu probabilități egale, valoarea medie a distanțelor la care se află aceștia de bar rămâne constantă. Acest lucru nu se modifică nici atunci când unul dintre ameni ajunge la un capăt. Rămânând acolo, el nu mai poate modifica această valoare medie.
După un timp suficient de mare, toți oamenii ajung la unul dintre capete. Fie

n_p numărul de oameni care ajung la poliție și n_a, numărul de oameni care ajung acasă. Notăm d_p distanța până la secția de poliție și d_a distanța până acasă. Astfel

$$N = n_p + n_a$$

Considerând originea axei în punctul în care se află barul, distanța medie a oamenilor față de acesta va fi

$$d = -n_p * d_p + n_a * d_a$$

Deoarece $d = 0$, obținem că

$$n_p = n_a * \frac{d_a}{d_p}$$

Deci,

$$n_a = N \frac{1}{1 + \frac{d_a}{d_p}}$$

Probabilitatea cerută va fi astfel:

$$p = \frac{d_p}{d_p + d_a}$$

Adică $p = 300/800$, $p = 0.375$.

5 Entropia alfabetului

Folosind fie un soft online de numărare a literelor împreună cu un program de calcul tabelar, fie un script special realizat într-un limbaj de programare, putem obține rapid următorul tabel:

	Număr	Probabilitate	Entropie
A	85	0.0769230769230769	0.284649209087776
B	12	0.0108597285067873	0.0708582966902187
C	23	0.020814479638009	0.116275276071585
D	40	0.0361990950226244	0.173317739706477
E	180	0.16289592760181	0.426457882742843
F	17	0.0153846153846154	0.0926518125081301
G	26	0.0235294117647059	0.127279786732652
H	83	0.0751131221719457	0.280531829414792
I	54	0.048868778280543	0.212820751325093
J	0	0	0
K	10	0.00904977375565611	0.0614289824379315
L	52	0.0470588235294118	0.207500749935892
M	37	0.0334841628959276	0.164085031384655
N	79	0.0714932126696833	0.272106735368356
O	87	0.0787330316742081	0.288705142790421
P	27	0.0244343891402715	0.130844764802818
Q	4	0.00361990950226244	0.0293568530471631
R	72	0.065158371040724	0.256717834392965
S	32	0.0289592760180995	0.147976996323006
T	80	0.0723981900452489	0.274237289367705
U	29	0.0262443438914027	0.137831348520711
V	14	0.0126696832579186	0.0798503712679608
W	32	0.0289592760180995	0.147976996323006
X	0	0	0
Y	30	0.0271493212669683	0.141256291185618
Z	0	0	0
Total	1105	1	4.12471797142778

Cazurile în care numărul de apariții este zero sunt neglijate, nefiind rezultate posibile ale procesului considerat. Deci, $H = 4.1247$ biți.

6 Convertorul analogic-digital

Metoda optimă de căutare este bisecția, asemănătoare căutării binare într-un vector ordonat. Astfel, alegând ca prim punct de căutare mijlocul intervalului, eroarea maximă pentru primul pas este de $\epsilon_1 = \frac{b-a}{2}$. Cu fiecare pas ulterior, verificăm dacă valoarea reală este mai mare sau mai mică decât mijlocul intervalului curent, apoi restrângem intervalul de căutare în regiunea în care se poate găsi valoarea căutată.
Astfel

$$\epsilon_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Pentru a obține acuratețea dorită vom avea nevoie de

$$n = \log_2 \frac{b-a}{\epsilon} - 1$$

Deci, $n = 34.57$. Deoarece numărul de comparații trebuie să fie întreg,

$$n_{min} = 35$$

7 Curent alternativ și continuu

Avem

$$I_{max} = I_{DC} + I_{AC}$$

$$I_{min} = I_{DC} - I_{AC}$$

$$I_{DC} = \frac{1}{2}(I_{max} + I_{min})$$

$$I_{AC} = \frac{1}{2}(I_{max} - I_{min})$$

$$P = (I_{DC}^2 + \frac{I_{AC}^2}{2})R$$

Calculând, obținem $P = 0.48375W$.

8 Bateria pe gaz

După comprimarea adiabatică, temperatura gazului va fi

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 k^{\gamma-1}$$

unde γ este exponentul adiabatic al gazului. Energia folosită pentru a comprima gazul este:

$$E_{consumat} = \nu R T_1 (k^{\gamma-1} - 1)$$

Deoarece $T_3 = T_1$ și $V_3 = kV_1$, obținem folosind ecuația de stare a gazului ideal $p_3 = kp_1$.
Scriind apoi ecuația transformării adiabatice în funcție de T și p, obținem:

$$T_4^{\gamma} = T_3^{\gamma} \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\gamma-1}$$

Știind că $T_3 = T_1$, obținem că

$$T_4 = T_1 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Energia utilă eliberată în această transformare este

$$E_{util} = \nu R T_1 (1 - k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}})$$

Eficiența acumulatorului este

$$\eta = \frac{E_{util}}{E_{consumat}} = \frac{1 - k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{k^{\gamma-1} - 1}$$

Înlocuind $k = 15$ și $\gamma = \frac{7}{5}$, obținem $\eta = 0.275671$.

9 Șase ouă în șase coșuri

Sistemul poate fi reprezentat folosind un vector ce are ca element n_i numărul de ouă din coșul i, reprezentat ca fracție din numărul total de ouă.

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_N)^T$$

Tranzițiile pot fi reprezentate prin următoarea matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \frac{9}{10} & \frac{25}{26} & ... \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{26} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Astfel,

$$n_{(i+1)} = M \cdot n_{(i)}$$

Condiția de staționaritate este $n_{(i+1)} = n_{(i)}$. Înlocuind, obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} n_1 = \frac{1}{2}n_1 + \frac{4}{5}n_2 + \frac{9}{10}n_3 + ... \\ n_2 = \frac{1}{2}n_1 \\ n_3 = \frac{1}{5}n_2 \\ n_4 = \frac{1}{10}n_3 \\ n_5 = \frac{1}{26}n_4 \\ ... \end{cases} \tag{1}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{N} n_i = 1$ (suma fracțiilor de ouă din fiecare coș este 1), avem:

$$n_1(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}\frac{1}{26} + ...) = 1$$

Suma din paranteză converge foarte rapid, primii 6 termeni oferindu-ne 5 zecimale corecte. Adică,

$$n_1 \cdot 1.610611 = 1$$

$$n_1 = 0.620882$$

10 Cutremur

Pentru cazul frecării dinamice (singurul în care cărămida poate cădea de pe masă), accelerația relativă a celor două corpuri va fi

$$a_{rel} = a_{cutremur} - \mu g$$

Distanța parcursă de centrul de greutate al cărămizii față de masă în timpul cutremurului este

$$d = \frac{1}{2} a_{rel} \Delta t^2$$

Pentru a nu cădea de pe masă se pune condiția

$$d \leq \frac{l}{2}$$

unde l este lungimea laturii mesei. Obținem astfel

$$\frac{1}{2}(a_{cutremur} - \mu g)\Delta t^2 \leq \frac{l}{2}$$

$$\mu \geq \frac{a_{cutremur} - \frac{l}{\Delta t^2}}{g}$$

$$\mu \geq 0.81549$$

Astfel, $\mu_{min} = 0.81549$.