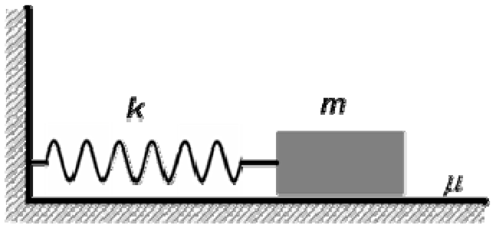
Un corp având masa m se poate mişca de-a lungul unei drepte pe o masă orizontală, între el şi suprafaţa mesei coeficientul de frecare fiind μ. Corpul este legat de un resort elastic ideal, cu constanta elastică k, fixat de un perete ca în figură. Iniţial corpul este deplasat spre stânga poziţiei în care resortul este nedeformat, astfel încât resortul este comprimat cu x_0, şi este lăsat "liber", fără viteză iniţială.



a) Stabiliţi condiţia pentru ca acest corp să părasească poziţia iniţială.

b) Considerând această condiţie îndeplinită dar mărimea x_0 necunoscută, identificaţi regiunea în care corpul se va opri definitiv.

c) Presupunând deformarea x_0 suficient de mare pentru ca acest corp să execute câteva oscilaţii, determinaţi poziţiile punctelor de întoarcere (unde mişcarea îşi schimbă sensul).

d) Tinând seama de rezultatele de la punctele b) şi c), formulaţi condiţia de oprire definitivă.

e) După cât timp de la începutul mişcării se întâmplă prima întoarcere? Dar a doua? Dar a treia?

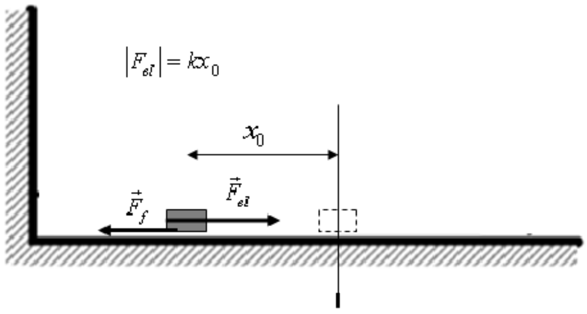
f) Cunoscînd $x_0 = 15$ cm, $k = 100$ N/m, $\mu = 0{,}2$ şi $m = 1$ kg, calculaţi durata mişcării. Se va considera acceleraţia gravitaţională $g = 10$ m/s^2.

Indicaţie: Cerinţele c), d), e) şi f) pot fi rezolvate observînd similitudinea (pe porţiuni) cu un fenomen bine cunoscut.

Barem de notare
1 punct din oficiu
a) 0,5 puncte
b) 0,5 puncte
c) 2 puncte
d) 1 puncte
e) 2 puncte
f) 3 puncte

Total 10 puncte

a)



a) Resortul fiind comprimat cu x_0 acţionează asupra corpului cu forţa de modul kx_0 orientată spre dreapta. Între corp şi suprafaţa mesei apare o forţă de frecare statică, în sens opus tendinţei de deplasare. Valoarea maximă a modulului acestei forţe este μmg. Pentru a pleca din repaus corpul trebuie să capete acceleraţie (cît de mică), deci condiţia este

$$kx_0 > \mu mg$$

b) Considerînd această condiţie îndeplinită dar mărimea x_0 necunoscută, identificaţi regiunea în care corpul se va opri definitiv.

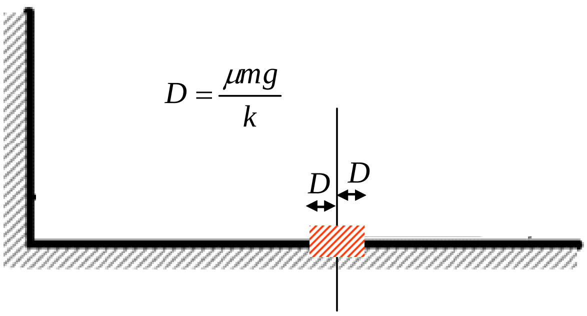
Pentru oprire definitivă corpul trebuie să ajungă la viteza nulă într-un punct în care condiţia de plecare de la punctul a) să NU fie îndeplinită, adică

$$k|x| \le \mu mg$$

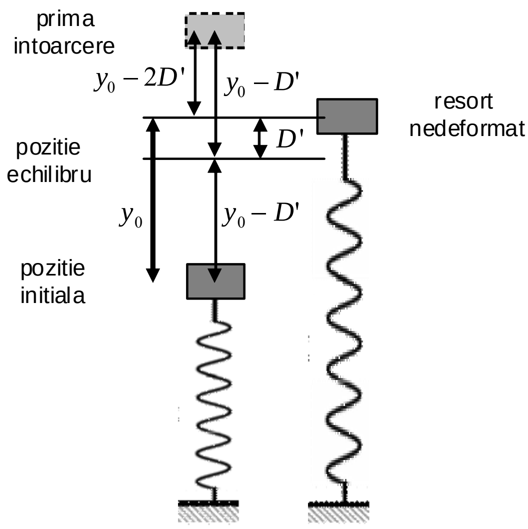
Regiunea aceasta se întinde de o parte şi alta a poziţiei în care resortul nu este deformat, pînă la distanţa

$$D = \frac{\mu mg}{k}$$

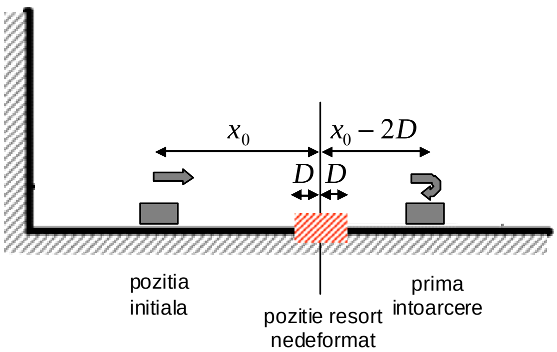
măsurată de la această poziţie.



c) Să alegem originea axei de coordonate în punctul în care resortul nu este deformat Pînă cînd viteza ajunge la zero corpul se mişcă sub efectul forţei elastice $F_{el} = -kx$ şi al forţei de frecare cinetică (care este constantă, egală în modul cu μmg şi orientată în sensul invers mişcării.



Situaţia este similară cu mişcarea pendulului elastic vertical care se mişcă în cîmp gravitaţional (vezi figura) după ce resortul a fost comprimat şi apoi lăsat liber. Forţa constantă este aici greutatea şi ea este orientată în sensul opus mişcării pînă cînd corpul ajunge la prima întoarcere (la înalţimea maximă) exact ca în problema noastră.. Pentru pendulul elastic cunoaştem mişcarea. Acesta efectuează oscilaţii armonice în jurul poziţiei de echilibru, care este cu $D' = \frac{mg}{k}$ mai jos decît poziţia la care resortul nu este deformat. Dacă y_0 a fost deformarea iniţială, prima întoarcere se va face la o poziţie simetrică faţă de cea de echilibru, adică la o distanţă de $y_0 - 2D'$ faţă de poziţia în care resortul nu este deformat.



Astfel, pentru sistemul din problemă, prima întoarcere se va face în dreapta originii, la o distanţă egală cu $|x_1| = x_0 - 2D = x_0 - 2\frac{\mu mg}{k}$ faţă de aceasta. Aici corpul ajunge la viteza nulă şi apoi, dacă $|x_1| > D$, începe mişcarea în sens invers. Forţa de frecare îşi schimbă şi ea sensul şi ne găsim exact ca în situaţia iniţială, numai că poziţia iniţială este acum în dreapta iar distanţa iniţială pînă la origine este $x_0 - 2D$. Dacă x_0 a fost destul de mare, corpul traversează regiunea găsită la punctul b) şi întoarce undeva în stînga ei, la distanţa $|x_2| = |x_1| - 2D = x_0 - 4D$ faţă de origine. A treia întoarcere va avea loc în dreapta originii la distanţa $|x_3| = |x_2| - 2D = x_0 - 6D$ şi aşa mai departe. Pentru a n-a întoarcere distanţa faţă de origine va fi $|x_n| = x_0 - 2 \cdot n \cdot D$.

Pendulul elastic vertical s-ar mişca în continuare ca cel din problema noastră dacă la fiecare întoarcere cîmpul gravitaţional şi-ar schimba sensul, vectorul greutate fiind mereu orientat invers decît viteza.

d) Fiecare nouă întoarcere are loc la o distanţă de origine cu $2D$ mai mică decît precedenta. Pentru un anumit n_{stop} această poziţie se va găsi în regiunea de oprire definitivă determinată la punctul b) . n_{stop} este, deci, cel mai mic număr întreg n care îndeplineşte condiţia

$$\left|x_0 - 2 \cdot n \cdot D\right| \le D$$

e) Revenind la pendulul elastic vertical în cîmp gravitaţional, timpul pînă la prima întoarcere este jumătate din perioadă adică

$$t_1 = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Acesta este şi timpul pînă la prima întoarcere în problema noastră. Pînă la a doua întoarcere mişcarea este similară, dar cu ampltudine mai mică. Cum perioada nu depinde de amplitudine, timpul necesar este tot o jumătate de perioadă. De aici rezultă că

$$t_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ şi } t_3 = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

f)

$$D = \frac{\mu m g}{k} = \frac{0{,}2 \cdot 1\,\text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}^2}{100\ \text{N/m}} = 0{,}02\ \text{m} = 2\ \text{cm}$$

$$\left|x_0 - 2 \cdot n \cdot D\right| \le D \Rightarrow \left|15 - 4 \cdot n\right| \le 2 \Leftrightarrow \left|3{,}75 - n\right| \le 0{,}5$$

Cel mai mic număr întreg care îndeplineşte relaţia anterioară este 4. În consecinţă, corpul se va opri definitiv la momentul

$$t_4 = 4\pi\sqrt{\frac{1\,\text{kg}}{100\ \text{N/m}}} = 1{,}26\ \text{s}$$

la distanţa

$$\left|x_4\right| = \left|x_0 - 8D\right| = 1\text{cm}$$

în dreapta originii.