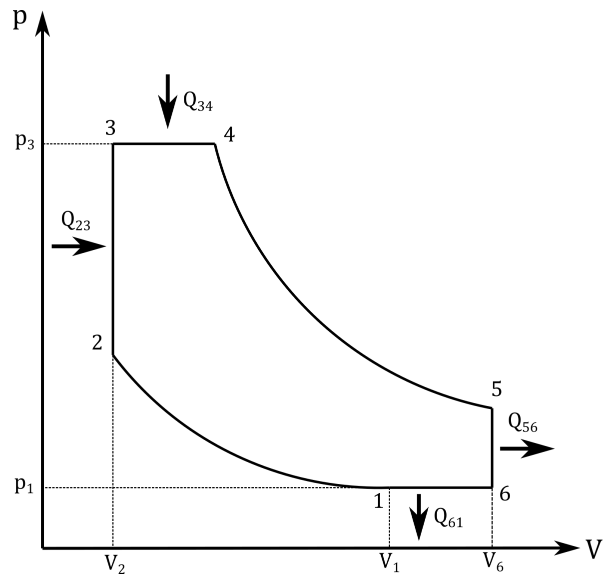
Subiecte ”BE A FEYNMAN ”- 16 Noiembrie 2024

PROBLEMA I. CICLUL ATKINSON

(a)



Se acordă 0,1 puncte pentru fiecare transformare și 0,1 pentru reprezentarea fiecărei călduri.

(b) Folosind ecuația de stare a gazului ideal și legile transformărilor, obținem:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \quad p_4 = p_3 \quad p_5 = \frac{NRT_5}{V_6} \quad p_6 = p_1$$

$$V_3 = V_2 \quad V_4 = \left(\frac{NRT_5}{p_3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_6^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad V_5 = V_6$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{NR} \quad T_2 = \frac{p_1 V_1}{NR}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad T_3 = \frac{p_3 V_3}{NR}$$

$$T_4 = \left(\frac{p_3 V_6}{NR}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_5^{\frac{1}{\gamma}} \quad T_6 = \frac{p_1 V_6}{NR}$$

Se acordă 0,25 puncte pentru fiecare parametru scris corect.

(c) Lucrul mecanic în transformările adiabatice este:

$$L_{12} = -\Delta U_{12} = cNR\,(T_2 - T_1)$$
$$L_{45} = -\Delta U_{45} = cNR\,(T_5 - T_4)$$

În transformările izocore nu se efectuează lucru mecanic:

$$L_{23} = L_{56} = 0$$

Lucrul mecanic în transformările izobare este:

$$L_{34} = p_3 (V_4 - V_3) = NR (T_4 - T_3)$$
$$L_{61} = p_1 (V_1 - V_6) = NR (T_1 - T_6)$$

Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este:

$$\begin{aligned} L &= L_{12} + L_{34} + L_{45} + L_{61} \\ &= cNR (T_2 - T_1 + T_5 - T_4) + NR (T_4 - T_3 + T_1 - T_6) \end{aligned}$$

Se acordă 0,4 puncte pentru calculul lucrului mecanic pe fiecare dintre cele șase transformări și 0,6 puncte pentru calculul lucrului mecanic total efectuat într-un ciclu.

(d) În transformările adiabatice nu este schimbată căldură cu exteriorul:

$$Q_{12} = Q_{45} = 0$$

Căldura schimbată în procesele izocore este:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = cNR (T_3 - T_2)$$
$$Q_{56} = \Delta U_{56} = cNR (T_6 - T_5)$$

Căldura schimbată în procesele izobare este:

$$Q_{34} = (c + 1)NR (T_4 - T_3)$$
$$Q_{61} = (c + 1)NR (T_1 - T_6)$$

Căldura schimbată într-un ciclu este:

$$Q^+ = Q_{23} + Q_{34} = cNR (T_3 - T_2) + (c + 1)NR (T_4 - T_3)$$

Se acordă 0,3 puncte pentru calculul căldurii schimbate pe fiecare dintre cele șase transformări și 0,2 puncte pentru calculul căldurii totale primite într-un ciclu.
(e) Folosind definiția randamentului, obținem:

$$\begin{aligned} \eta_A &= \frac{L}{Q^+} = -\frac{c (T_2 - T_1 + T_5 - T_4) + (T_4 - T_3 + T_1 - T_6)}{c (T_3 - T_2) + (c + 1) (T_4 - T_3)} \\ &= \frac{(T_1 - T_2 + T_4 - T_5) + (\gamma - 1) (T_3 - T_4 + T_6 - T_1)}{(T_3 - T_2) + \gamma (T_4 - T_3)} \end{aligned}$$

Se acordă 0,25 puncte pentru scrierea corectă a definiției randamentului și 0,75 puncte pentru calculul corect.

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA II. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A LEGII STEFAN-BOLTZMANN

Definiția Propoziția (a) Ecuația pentru temperatura absolută a filamentului este:

$$T = 273 + \frac{1}{2\beta}\left(\sqrt{a^2 + 4\beta\left(\frac{R(t)}{R_0} - 1\right)} - a\right)$$

(0,4 puncte)

U(V)	I(A)	V (mV)	T(K)
1	2.2	0.15	672
2	2.8	0.62	983
3	3.45	1.3	1160
4	4	2.2	1300
5	4.45	3.2	1430
6	4.9	4.45	1540
7	5.3	5.9	1630
8	5.7	7.5	1720

(1,6 puncte, câte 0,2 pentru fiecare valoare corect calculată)

(b) Folosim proporționalitatea $P/S \sim V$. În acest caz putem rescrie ecuația din enunț ca $V = CT^n$, unde C este o constantă care depinde de geometria sistemului și de funcționarea fotodiodei, dar care nu ne interesează. Vom aplica logaritmul natural în această relație:

$$\ln V = \ln C + n \ln T$$

Notăm $y = \ln V$ și $x = \ln T$:

$$y = nx + \ln C$$

Dependența obținută este de forma $y = Ax + B$.

(c) Avem tabelul auxiliar:

T (K)	V(mV)	x=ln(T)	y=ln(V)	xx	yy	xy
672	0.15	6.5103	-1.8971	42.3835	3.5991	-12.3507
983	0.62	6.8906	-0.478	47.4805	0.2285	-3.294
1160	1.3	7.0562	0.2624	49.7896	0.0688	1.8513
1300	2.2	7.1701	0.7885	51.4106	0.6217	5.6533
1430	3.2	7.2654	1.1632	52.7865	1.3529	8.4508
1540	4.45	7.3395	1.4929	53.8688	2.2288	10.9572
1630	5.9	7.3963	1.775	54.7058	3.1505	13.1281
1720	7.5	7.4501	2.0149	55.5037	4.0598	15.0112

(3 puncte)

Prin aplicarea formulelor din enunț ajungem la tabelul:

N	S_x	$S_x x$	$S_x y$	S_y	$S_y y$	A	s_ε^2	s_A^2	s_A	$5.041 s_A$
8	57.0785	407.9289	39.4073	5.1216	15.3101	4.1903	0.0038	0.0055	0.0744	0.3751

Deci $n = 4.19 \pm 0.38$. Alegem $n = 4$, pentru a respecta condiția ca n să fie un număr întreg.

(3 puncte)

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA III. ELEMENTE DE FIZICĂ MATEMATICĂ

(a) Putem scrie ecuațiile de mișcare, înmulțind-o pe a doua cu i:

$$0 = \ddot{x} + 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x$$
$$0 = i\ddot{y} - 2\Omega i\dot{x} - \Omega^2 iy$$

Putem aduna aceste ecuații pentru a obține

$$0 = (\ddot{x} + i\ddot{y}) + 2\Omega(\dot{y} - i\dot{x}) - \Omega^2(x + iy) = \ddot{\eta} + 2\Omega(\dot{y} - i\dot{x}) - \Omega^2\eta$$

(1 punct) Observăm că

$$\dot{y} - i\dot{x} = -i(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\eta$$

Așadar,

$$0 = \ddot{\eta} - 2i\Omega\dot{\eta} - \Omega^2\eta$$

(0,5 puncte)
(b) Putem introduce $\eta = \alpha e^{\lambda t}$:

$$0 = \lambda^2\alpha e^{\lambda t} - 2i\lambda\Omega\alpha e^{\lambda t} - \Omega^2\alpha e^{\lambda t}$$

Apoi putem elimina factorii comuni și obține

$$0 = \lambda^2 - 2i\lambda\Omega - \Omega^2 = (\lambda - i\Omega)^2$$

Vedem că $\lambda = i\Omega$.
(c) Folosind răspunsul nostru de la partea (b) și $\alpha = Ae^{i\phi}$, avem

$$\eta(t) = Ae^{i(\Omega t + \phi)}$$

(0,5 puncte)
Folosind identitatea Euler, avem

$$x(t) + iy(t) = A\cos(\Omega t + \phi) + iA\sin(\Omega t + \phi)$$

Partea reală și cea imaginară devin

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$$
$$y(t) = A\sin(\Omega t + \phi)$$

(1,5 puncte)
(d) Considerăm ecuația diferențială dată:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Putem introduce $\psi(x, t) = Ae^{ikx - i\omega t}$ pentru a găsi

$$-i\omega Ae^{ikx - i\omega t} = -k^2 aAe^{ikx - i\omega t}$$

astfel încât

$$\omega = -ik^2 a$$

(e) Observăm că ecuația Schrödinger liberă ia forma ecuației căldurii, dar cu

$$a = \frac{i\hbar}{2m}$$

Apoi, folosind răspunsul de la partea (d), avem

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

(f) Putem înmulți ambele părți ale răspunsului de la partea (e) cu $\hbar$ și folosind $E = \hbar\omega$ și $p = \hbar k$, obținem

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Un impuls clasic are forma $p = mv$, deci aceasta ne dă energia clasică pentru o particulă liberă (asupra căreia nu acționează nicio forță, deci nu există energii potențiale în sistem):

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

(g) Considerăm ecuația Klein-Gordon:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

Putem, la fel ca înainte, să introducem o presupunere $\phi(x,t) = Ae^{ikx-i\omega t}$. Aceasta conduce la

$$-\frac{\omega^2}{c^2}Ae^{ikx-i\omega t} + k^2Ae^{ikx-i\omega t} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}Ae^{ikx-i\omega t} = 0$$

Anulând termenii comuni, vedem că

$$\omega^2 = k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}$$

(1 punct)
sau

$$\omega = \pm\sqrt{k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}}$$

(0,5 puncte)
Observăm că atât ω pozitiv cât și negativ rezolvă ecuația Klein-Gordon. Observația este esențială în contextul informațiilor din nota de pe subiect, legate de existența antimateriei. Ultimele 0,5 puncte se acordă integral doar dacă sunt prezente ambele soluții. Pentru o singură soluție se acordă jumătate din punctaj.

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA IV. PENDULUL CICLOIDAL

Definiția Propoziția

(a) Se scriu coordonatele punctului de pe cerc:

$$x = R(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = R(1 + \cos\varphi)$$

Deoarece funcțiile trigonometrice sunt periodice, deci reductibile la primul cerc, prezența explicită a unghiului φ consideră deplasarea roții pe șosea, depărtarea față de origine.

(b) Trebuie aflate componentele vitezei pe cele două axe, pentru a afla viteza corpului.

$$\dot{x} = R(\dot{\varphi} - \cos\varphi\dot{\varphi})$$

$$\dot{y} = -R\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2R^2\dot{\varphi}^2(1 - \cos\varphi)$$

(1 punct)

Alegând axa Ox ca nivel de energie potențială nulă, avem:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy = mR^2\dot{\varphi}^2(1 - \cos\varphi) + mgR(1 + \cos\varphi)$$

(0,5 puncte)

(c) Asupra corpului nu acționează forțe disipative, deci energia totală este constantă. Derivata sa în raport cu timpul este astfel 0.

(0,5 puncte)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = mR^2(1 - \cos\varphi)2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mR^2\sin\varphi\dot{\varphi}^3 - mgR\sin\varphi\dot{\varphi} = 0$$

Se va putea ajunge la:

$$\sin\frac{\varphi}{2}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{2R}\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

Folosind substituția din enunț și dervând de două ori, se obțin ecuațiile:

$$\dot{u} = -\sin\frac{\varphi}{2}\frac{\dot{\varphi}}{2}$$

$$\ddot{u} = \cos\frac{\varphi}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{4} - \sin\frac{\varphi}{2}\frac{\ddot{\varphi}}{2}$$

De aici se obțin componentele primei ecuații, care se va rescrie:

$$\ddot{u} + \frac{g}{4R}u = 0$$

De aici, $T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$.

(2,5 puncte)

(d) Perioda este de forma $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, asemenea pendulului gravitațional (semnificația acestei lungimi va fi explicată ulterior). Diferența majoră față de pendulul gravitațional este că nu am aproximat nicăieri că oscilațiile sunt mici, deci pe cicloidă se obține un izocronism riguros, în timp ce pe cerc apar abateri pe măsură ce unghiul crește.

(e) Vom nota cu s lungimile arcelor de cicloidă.

$$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t = R\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\dot{\varphi}\,\mathrm{d}t = R\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}s = 2R\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi$$

(f) Să ne imaginăm, pentru analogie, că $\varphi = 2\omega t$.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \omega 4R\sin(\omega t)$$

De la oscilatorul armonic știm:

$$y = A\cos(\omega t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t)$$

Obținem:

$$s = -4R\cos\frac{\varphi}{2}$$

Considerând valorile extreme pentru φ, obținem $S = 8R$.
Notă: Se acceptă și soluțiile bazate pe folosirea calculului integral. Metoda aceasta introduce, de fapt, noțiunea de rază de curbură, care are în cazul cicloidei formula $r = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$.
(g) Deoarece $s = -4Ru$, ecuația va lua forma:

$$\ddot{s} + \frac{g}{4R}s = 0$$

(h) Corpul trebuie să se afle permanent pe cicloidă, deci $|A| \leq 4R$ (jumătate din lungimea totală a acesteia). Din cele două ecuații scrise pe cazul general pentru oscilatorul armonic, prin ridicare la pătrat și adunarea funcțiilor trigonometrice, reiese:

$$s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2$$

$$\sqrt{s_0^2 + \frac{4Rv_0^2}{g}} \leq 4R$$

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA V. COLIZIUNI

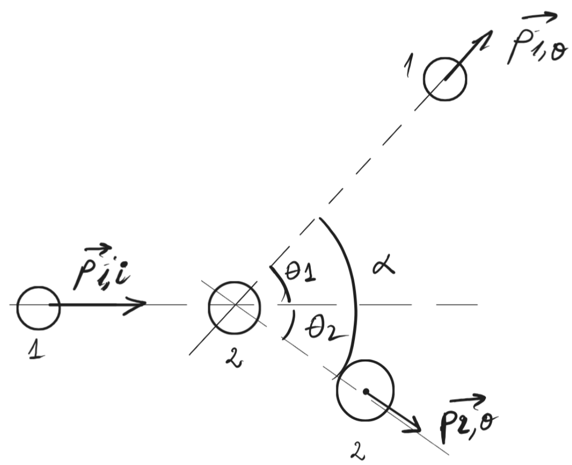


Figura 1: Sistemul laboratorului

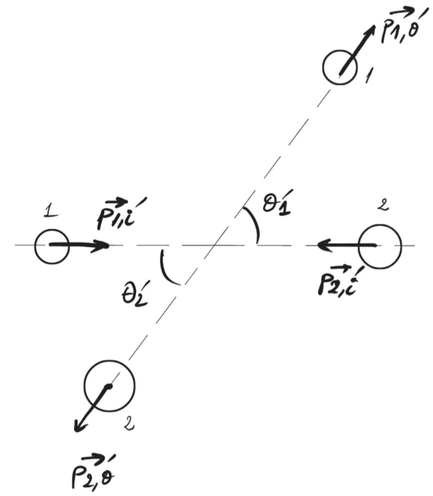


Figura 2: Sistemul centrului de masă

TOTAL: 10p

În urma corectării, s-a valorificat cu până la jumătate din punctajul pentru itemul/pasul aferent pentru abordări unidimensionale ale coliziunii, dacă raționamentul a fost corect și calculul dus până la capăt.

(a) **Exprimați vitezele și impulsurile din sistemul centrului de masă. (1.5p)**

Rezolvare: Urmărind indicațiile din text:

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = m_1 \vec{v}_{1,i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

(0.25p)

Pentru a trece din SCM în SL, se ține cont că la vitezele din SCM se adaugă viteza centrului de masă:

$$\vec{v}_{1,i} = \vec{v'}_{1,i} + \vec{v}_{CM} \tag{2a}$$

$$\vec{v}_{2,i} = \vec{v'}_{2,i} + \vec{v}_{CM} \tag{2b}$$

(0.25p)

Astfel, după axa Ox, exprimăm modulele vitezelor:

$$v'_{1,i} = v_{1,i} - v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{3a}$$

$$v'_{2,i} = v_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{3b}$$

(2 x 0.15p) iar

$$p'_{1,i} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} := \mu v_{1,i} = p'_{2,i} \tag{4}$$

(2 x 0.1p)

În SCM avem impuls total 0, deci $\vec{p'}_{1,i} + \vec{p'}_{2,i} = \vec{0}$. De asemenea avem conservare de energie,

$$\frac{\vec{p'}^2_{1,i}}{2m_1} + \frac{\vec{p'}^2_{2,i}}{2m_2} = \frac{\vec{p'}^2_{1,o}}{2m_1} + \frac{\vec{p'}^2_{2,o}}{2m_2} \tag{5}$$

din care reiese că și impulsurile de ieșire sunt egale ca mărime cu $\mu v_{1,i}$.
(0.2p)

$$v'_{1,o} = \frac{\mu}{m_1} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{6a}$$
$$v'_{2,o} = \frac{\mu}{m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} \tag{6b}$$

(2 x 0.15p)
(b) **Demonstrați că vectorul vitezei relative este mărime invariantă (nu depinde de sistemul de referință ales) și că modulul acesteia este mărime conservată în urma coliziunii. Demonstrați că unghiul χ prin care viteza relativă își schimbă orientarea în urma coliziunii este de asemenea invariant. (1.5p)**
Rezolvare:
Ne putem inspira din ecuațiile (2a,b) pentru a scrie în general o transformare între două sisteme de referință (1) și (2), de exemplu, pentru vitezele de intrare:

$$\vec{v}_{1,i}^{(1)} = \vec{v}_{1,i}^{(2)} + \vec{v}_0 \tag{7a}$$
$$\vec{v}_{2,i}^{(1)} = \vec{v}_{2,i}^{(2)} + \vec{v}_0 \tag{7b}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}_{1,i}^{(1)} - \vec{v}_{2,i}^{(1)} = \vec{v}_{1,i}^{(2)} + \vec{v}_0 - \vec{v}_{2,i}^{(2)} - \vec{v}_0 = \vec{v}_{1,i}^{(2)} - \vec{v}_{2,i}^{(2)} := \vec{v}_{12,i}$$

(0.25p)
Așadar am demonstrat că viteza relativă la intrare este mărime invariantă. Același lucru se menține pentru vitezele de ieșire. Mărimile $|\vec{v}_{12,i}|$, $|\vec{v}_{12,o}|$, $\vec{v}_{12,i} \cdot \vec{v}_{12,o}$ sunt de asemenea invariante.
(Invarianții 0.25p)
Afirmăm că $|\vec{v}_{12,i}| = |\vec{v}_{12,o}|$. Pentru aceasta, este suficient să găsim un singur sistem de referință unde egalitatea este adevărată. De exemplu, în sistemul centrului de masă, am demonstrat rel. (3a), (3b), (6a), (6b), din care reiese că modulul vitezei relative înainte și după coliziune este același și anume $v_{1,i}$. Mărimile fiind invariante, aceasta se menține în toate sistemele de referință.
(0.5p)
Folosind invarianța lui $\vec{v}_{12,i} \cdot \vec{v}_{12,o}$ cu remarca de mai sus, reiese și că $\angle(\vec{v}_{12,i}, \vec{v}_{12,o}) := \chi$ este un invariant, deci vectorul viteză relativă se rotește cu același unghi în toate sistemele de referință.
(0.5p)
(c) **Folosiți cantitățile invariante de la subpunctul b) pentru a calcula vitezele finale în sistemul laboratorului (2p)**
Rezolvare:
Vectorul viteză relativă are modulul $v_{1,i}$ și face unghiul $\chi = \theta'_1$ față de direcția inițială a acestuia (acest lucru din urmă se datorează invarianței unghiuiului χ). Scriem, în sistemul laboratorului:

$$\vec{v}_{1,o} - \vec{v}_{2,o} = v_{1,o}(\vec{e}_x \cos\chi + \vec{e}_y \sin\chi) \tag{8}$$

(0.25p)
De asemenea, din conservarea impulsului:

$$m_1\vec{v}_{1,o} + m_2\vec{v}_{2,o} = m_1\vec{v}_{1,i} \tag{9}$$

(0.25p)
Din rezolvarea sistemului de ecuații liniare (8), (9) reies vectorii vitezelor finale

$$\vec{v}_{1,o} = v_{1,i}(\vec{e}_x \frac{m_1 + m_2\cos\chi}{m_1 + m_2} + \vec{e}_y \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sin\chi) \tag{10a}$$
$$\vec{v}_{2,o} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}((1 - \cos\chi)\vec{e}_x - \sin\chi\vec{e}_y) \tag{10b}$$

(1p)

$$v_{1,o} = v_{1,i}\frac{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi)^{1/2}}{m_1+m_2} \tag{11a}$$

$$v_{2,o} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1,i}sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \tag{11b}$$

(0.5p)

(d) **Exprimați unghiurile din sistemul laboratorului:** θ_1, θ_2 **de deviere de la direcția inițială de mișcare a particulelor și unghiul final dintre ele,** α**. În ce condiții este acest unghi egal cu** 90^o**? (1.5p)**

Rezolvare: Ne folosim de expresiile (10a), (10b) pentru a extrage:

$$\tan(\theta_1) = \frac{m_2\sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi} \tag{12a}$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{\sin\chi}{1-\cos\chi} = \cot\left(\frac{\chi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi-\chi}{2}\right), \tag{12b}$$

(2 x 0.5p)

iar semnul minus din eq. (10b) lipsind la (12b) înseamnă că am considerat magnitudinea lui θ_2. Pentru condiția de unghi $\alpha = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, avem în vedere că $\theta_2 = \dfrac{\pi-\chi}{2}$, așadar $\theta_1 = \frac{\chi}{2} \Longrightarrow \tan\theta_1 = \dfrac{\sin\chi}{1+\cos\chi}$, care prin comparație cu expresia (12a) conduce la concluzia că $m_1 = m_2$.

(0.5p)

Alternativ, întâi se calculează unghiurile și apoi vitezele. Dacă s-a constatat că a fost urmată această rută, s-a distrbuit punctajul de 3.5 puncte corespunzător. Luăm relațiile (2a), (2b) și le descompunem după cele două axe Ox și Oy:

$$\left.\begin{aligned} v_{1,o}\cos(\theta_1) &= v'_{1,o}\cos(\theta'_1) + v_{CM} \\ v_{1,o}\sin(\theta_1) &= v'_{1,o}\sin(\theta'_1) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\div} \tan(\theta_1) = \frac{v'_{1,o}\sin(\theta'_1)}{v'_{1,o}\cos(\theta'_1) + v_{CM}} \tag{13}$$

Similar θ'_2.

(0.75p)

Atunci,

$$\xrightarrow[(1)]{(6a)} \begin{cases} \tan(\theta_1) = \dfrac{m_2\sin(\theta'_1)}{m_2\cos(\theta'_1) + m_1} \\ \tan(\theta_2) = \dfrac{\sin(\theta'_1)}{1+\cos(\theta'_1)} = \tan\left(\dfrac{\theta'_1}{2}\right) \end{cases} \tag{14}$$

(0.75p)

Discuția unghiului α se poate face acum analog ca mai înainte. (0.5p)

Aplicând conservarea impulsului pe axele Ox și Oy:

$$m_1v_{1,o}\sin\theta_1 = m_2v_{2,o}\sin\theta_2 \tag{15a}$$

$$m_1v_{1,o}\cos\theta_1 + m_2v_{2,o}\cos\theta_2 = m_1v_{1,i} \tag{15b}$$

(0.25p)

$$\begin{cases} v_{1,o} = v_{1,i}\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \\ v_{2,o} = v_{1,i}\dfrac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \end{cases} \tag{16}$$

(2 x 0.25p)

Înlocuind expresiile de la (14) pentru a le recupera pe cele familiare din (11a), (11b).

(0.75p)

(e) **Exprimați pierderea relativă de energie pentru particula 1 în sistemul laboratorului, ca funcție de unghiul χ. În ce condiții transferul de energie de la proiectil la țintă este ideal? (1p)**

Rezolvare:

Folosim ecuația (11a) pentru a scrie pierderea relativă de energie a particulei 1:

$$\epsilon(\chi) := \frac{T_{1,i} - T_{1,o}}{T_{1,i}} = \frac{v_{1,i}^2 - v_{1,o}^2}{v_{1,i}^2} = \frac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(1-\cos\chi) = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right), \tag{17}$$

din care se observă că transferul de energie este maxim în cazul în care $\chi = \pi$. Dacă în plus $m_1 = m_2$, $\epsilon(\chi) = 1$, adică particula 1 este oprită complet și particula 2 preia întreaga energie.

(0.75 expresie finală + 0.25p discuție)

(f) **Presupuneți că particulele de tip 2 formează un gaz ce ocupă un spațiu suficient de mare, cu densitatea volumică n, la temperatura T. Astfel, coliziunile se întâmplă aleator, ne-existând o direcție preferată în spațiu. Presupuneți că $m_1 \ll m_2$ și că energia inițială a particulei 1 este mult mai mare decât energia termică a gazului.**

Ce distanță medie este parcursă în gaz de către particula 1, pentru ca energia acesteia să fie atenuată până la termalizarea cu gazul? Estimați timpul necesar pentru a ajunge la această termalizare. (2.5p)

Rezolvare:

Se acceptă și rezolvările care nu au efectuat aproximațiile indicate.

Media funcției $\sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)$ după unghiurile permise $\chi = [0, 2\pi]$ este 1/2, așadar $\bar{\epsilon} = \dfrac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \approx \dfrac{2m_1}{m_2}$. (0.25p)

Energia cinetică a particulei 1 după N coliziuni trebuie să devină comparabilă cu energia termică în mediul de temperatură T:

$$T_{1,o}^{(N)} = T_{1,i}(1-\bar{\epsilon})^N \approx T_{1,i}(1-N\bar{\epsilon}) = \frac{3k_B T}{2} \tag{18}$$

$$\Longrightarrow N \approx \frac{m_2}{2m_1}\left(1 - \frac{3k_B T}{2T_{1,i}}\right)$$

(0.25p scrierea energiei după N coliziuni, 0.25p egalarea cu energia termică, 0.25p rezolvarea ecuației)

Având în vedere o estimare tipică a distanței interatomice în gazul 2 ca $d \propto n^{-1/3}$ (unde se acceptă diverse constante de proporționalitate), distanța parcursă de particula 1 în gazul 2 până la termalizare este de ordinul:

$$L = Nd \propto \frac{m_2}{2m_1} n^{-1/3}\left(1 - \frac{3k_B T}{2T_{1,i}}\right) \tag{19}$$

(0.5p)

Conform cu ecuația (18), viteza particulei 1 după coliziunea N este $v_{1,o}^{(N)} = v_{1,i}(1-\bar{\epsilon})^{N/2}$, deci timpul scurs între coliziunea N și coliziunea N+1 este de ordinul:

$$\tau^{(N)} = \frac{d}{v_{1,o}^{(N)}} \propto \frac{1}{n^{1/3} v_{1,i}}(1-\bar{\epsilon})^{-N/2} \tag{20}$$

(0.25p)

Timpul total scurs se poate calcula însumând toate intervalele între coliziuni:

$$\tau = \Sigma_{N=0}^{\infty}\tau^{(N)} = \Sigma_{N=0}^{\infty}\frac{d}{v_{1,o}^{(N)}} \propto \frac{1}{n^{1/3} v_{1,i}}\Sigma_{N=0}^{\infty}(1-\bar{\epsilon})^{-N/2}$$

(0.25p)

Se poate presupune că $N \gg 1$, așadar în membrul drept avem o serie geometrică de rație $(1-\bar{\epsilon})^{-1/2}$. Așadar:

$$\tau \propto \frac{1}{n^{1/3}v_{1,i}} \frac{1}{1-(1-\bar{\epsilon})^{-1/2}} \approx \frac{2}{n^{1/3}v_{1,i}\bar{\epsilon}} = \frac{2}{n^{1/3}v_{1,i}\bar{\epsilon}} = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{n^{1/3}v_{1.i}} \tag{21}$$

(0.5p)

PROBLEMA VI. MECANICĂ CEREASCĂ

1. Noțiuni de bază

Secțiune de teorie, fără cerințe.

2. Satelit în jurul Pământului

(a) (0.5 puncte)

$$(d_{min} + R) + (d_{max} + R) = 2a$$
$$\Rightarrow a = R + \frac{d_{min} + d_{max}}{2}$$
$$\Rightarrow a = 11250 \text{ km}$$

(b) (0.5 puncte)

$$d_{max} + R = a \cdot (1 + e)$$
$$\Rightarrow e = \frac{d_{max} + R}{a} - 1$$
$$\Rightarrow e \approx 0.33$$

(c) (0.5 puncte)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m + M)}$$
$$m \ll M \Rightarrow m + M \approx M \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$
$$\Rightarrow T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$
$$\Rightarrow T \approx 3 \text{ h } 36 \text{ min } 23 \text{ s}$$

(d) (0.5 puncte)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$
$$T_P^2 = \frac{4\pi^2 a_P^3}{GM_S}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{T}{T_P}\right)^2 = \left(\frac{a}{a_P}\right)^3 \cdot \frac{M_S}{M}$$
$$\Rightarrow M_S = M \cdot \left(\frac{T}{T_P}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_P}{a}\right)^3$$
$$\Rightarrow M_S \approx 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

3. Ciocnire cu modificarea orbitei(3 puncte)

Avem de-a face cu o ciocnire plastică, deci scriem conservarea impulsului total:

$$\vec{p_i} = \vec{p_f} \Rightarrow m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

Ridicăm această relație la pătrat, ținând cont că cele două viteze sunt perpendiculare (deci $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$):

$$m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 = (m_1 + m_2)^2 v^2$$
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 v^2 - m_1^2 v_1^2}{m_2^2}}$$

Conform legilor mișcării circulare uniforme, viteza satelitului înainte de ciocnire este dată de

$$F = F_{cp} \Leftrightarrow G\frac{m_1 M}{R^2} = \frac{m_1 v_1^2}{R}$$
$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{GM}{R}$$

Viteza ansamblului de după ciocnire se află cu ajutorul energiei pe elipsă:

$$E = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} - G\frac{(m_1+m_2)M}{r_a} = -G\frac{(m_1+m_2)M}{2a}$$

unde $r_a = R$ (elipsa este tangentă la cerc în punctul ciocnirii, care va reprezenta apogeul) și $r_p = \frac{R}{2}$, deci $a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2} = \frac{3R}{4}$. Obținem deci

$$v^2 = \frac{2}{3}\frac{GM}{R}$$

Înlocuim cele două viteze în expresia lui v_2 pentru a obține

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}\cdot\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]}$$

4. Întâlnirea satelitului cu nava-mamă(3 puncte)

Scriem legea de conservare a impulsului total. Având în vedere că vitezele finale sunt pe aceeași direcție cu cea inițială, dar sunt în sensuri opuse, putem trece relația direct la modul

$$(m+M)v = mv_p - Mv_n \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{v-v_n}{v+v_p}$$

Elipsa pe care va orbita satelitul este tangentă în perigeu, deci $r_p = 2R$ și $r_a = 16R$. De aici, $a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2} = 9R$. Viteza în periheliu se obține din energia totală pe traiectoria eliptică

$$E = \frac{mv_p^2}{2} - G\frac{mM_p}{r_p} = -G\frac{mM_p}{2a}$$
$$\Rightarrow v = \frac{2\sqrt{2}}{3}u,$$

unde am notat $u = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Pentru viteza navei după desprindere, o vom scrie ca funcție de perioada de orbită, știind că nava face patru orbite în timp ce satelitul face doar una.

$$v_n = \frac{2\pi\cdot 2R}{T_n} = \frac{4\pi R}{T_s/4} = \frac{16\pi R}{T_s} \tag{22}$$
$$\text{Kepler III: } T_s = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM_p}} = \frac{54\pi R}{u} \Rightarrow v_n = \frac{8}{27}u \tag{23}$$

Viteza ansamblului înainte de desprindere este, conform legilor mișcării circulare uniforme:

$$v = \sqrt{\frac{GM_p}{2R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}u$$

Înlocuind cele trei viteze, obținem

$$\frac{m}{M} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{8}{27}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}} \approx 0.25$$

5. Investigarea unui sistem binar

(a) (1 punct) În cazul celor două corpuri reale, perioada respectă legea a III-a a lui Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}$$

Pentru sistemul masă totală-masă redusă, perioada este dată de

$$T'^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(\mu + M)} \approx \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)} = T^2$$

unde s-a folosit aproximația $\mu \ll M \Rightarrow \mu + M \approx M$. În cazul forțelor, pentru sistemul real avem

$$F = G\frac{M_1 M_2}{a^2}$$

iar pentru cel echivalent

$$F' = G\frac{\mu M}{a^2} = G\frac{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(M_1 + M_2)}{a^2} = G\frac{M_1 M_2}{a^2} = F$$

Pentru energia potențială, scriem în cele două cazuri:

$$E = -G\frac{M_1 M_2}{a}$$
$$E' = -G\frac{\mu M}{a} = -G\frac{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(M_1 + M_2)}{a} = G\frac{M_1 M_2}{a} = E,$$

deci cele două sisteme sunt echivalente din punct de vedere al perioadei, al forței și al energiei potențiale.

(b) (1 punct)Condiția ce trebuie îndeplinită este ca unghiul sub care se văd stelele cu ochiul liber (notat α - vezi figura) să fie mai mare decât $\delta\theta$:

$$\alpha \geq \delta\theta \Rightarrow \alpha \geq 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Pentru că α este foarte mic (de ordinul minutelor sau secundelor de arc, în general), vom folosi aproximația $\tan x \approx x$ astfel:

$$\frac{\alpha}{2} \approx \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2d} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{d}$$

Deci, condiția noastră devine:

$$\frac{a}{d} \geq 1.22\frac{\lambda}{D} \Rightarrow a \geq 1.22\frac{\lambda d}{D}$$
$$\Rightarrow a \geq 39.6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

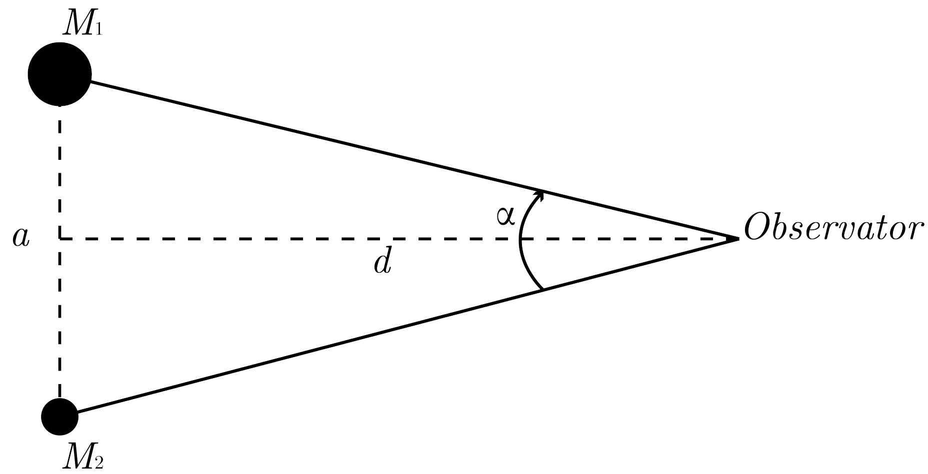


Figura 3: Unghiul sub care se vede sistemul binar cu ochiul liber

Subiect propus de Mihai Dragomir, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Liceul Teoretic „Mihai Ionescu", București

PROBLEMA VII. TURBINE ȘI ENERGIA SALTULUI HIDRAULIC

1. Înțelegerea Fenomenului (2.5 puncte)

Din relatiile de conservare a (1) debitului de masa $\dot{m}$ si (2) impulsului elementului de fluid care face saltul intrece cele 2 inaltimi :
(1)

$$\rho h_1 L v_1 = \rho h_2 L v_2$$

(2)

$$\dot{m}_1 v_1 + \frac{1}{2}\rho g h_1^2 L = \dot{m}_2 v_2 + \frac{1}{2}\rho g h_2^2 L = \dot{m}_1 v_2 + \frac{1}{2}\rho g h_2^2 L$$

Unde in (2) am considerat derivata impulsului in functie de timp pentru a evalua fortele de presiue dinamica (primul termen) si hidrostatica (al 2-lea termen) in cazul elementului fluxului de apa, precum si debitul de masa constanta. Pentru a aproxima forta de presiune hidrostatica am folosit hintul cu centrul de greutate al elementului de fluid, astfel $F(h) = p(h)S = \rho g h * \frac{h}{2} L$. In realitate, ecuatia de miscare se rezolva foarte usor prin calcul integral, anume $F_t(h) = \int_{h_1}^{h_2} \rho g L h dh$ de-a lungul curgerii globale intre cele 2 inaltimi. (2) devine:

$$v_1 = h_2 \frac{1}{2} g(h_2 + h_1)$$

Cu mare usurinta putem gasi expresia lui h_2, inlocuind in (2) viteza dupa salt a fluxului de apa dat de (1).
(3)

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2h_1 v_1^2}{g}}$$

De aici (folosind iar hintul), energia potentiala disipata pe lungimea D este: (4)

$$\Delta E_p = \frac{\rho g L D (h_2^2 - h_1^2)}{2} = \frac{\rho g L D}{2}\left(-\frac{h_1^2}{2} + \frac{2h_1 v_1^2}{h} - h_1\sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2h_1 v_1^2}{g}}\right)^2$$

Analog, ecuatia se rezolva prin integrarea termenilor $E_p(h) = \int_{h_1}^{h_2} \rho g L D \, h \, dh$ Calculam mai intai energia specifica totala:

$$\Delta e = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(h_2 - h_1)$$

In functie de h_1 si h_2, schimband variabilele din (3), putem scrie

$$v_1^2 = \frac{g}{2}\frac{h_2}{h_1}(h_2 + h_1).$$

Substituind si tinand cont de (1), ajungem la expresia energiei pierdute:

$$\Delta e = g\frac{(h_1 - h_2)^3}{4h_2 h_1} < 0$$

Pentru energia totala disipata, avem ca:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta E_p = \rho L D (h_2 - h_1)\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{\rho g L D (h_2^2 - h_1^2)}{2}$$

Rescriem in functie de variabilele date:

$$\Delta E = \rho L D\left(\frac{g}{4}(h_2 + h_1)(\frac{h_1}{h_2} - \frac{h_2}{h_1})(h_2 - h_1) + \frac{g}{2}(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)\right)$$

$$\Delta E = \rho g L D \frac{h_2^2 - h_1^2}{4}\left(2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 h_2}\right)$$

care este < 0 pentru $h_1 < (\sqrt{2} - 1)h_2$. Cum energia se disipa in caldura si turbulente ale fluxului de ape (datorate vascozitatii acesteia), putem presupune ca cele 2 tipuri de caldura sunt pierdute prin diferenta de energie potentiala si cinetica (sau distributiv, intr-o prima aproximatie).

2. Turbine de apă si aer

(a) (1.25 puncte) Folosind teorema Steiner, calculam momentul de inertie total al turbinei fata de axa centrala, perpendiculara pe rotor (si spite). Mai intai, calculam momentul de inertie al unei spite fata de axa centrala a rotorului. Axa este dispusa fata de centrul de masa al spitei la distanta $R + \frac{l}{2}$, deci:

$$I_{c,s} = \frac{m}{12}(l^2 + w^2) + m(R + \frac{l}{2})^2$$

Iar momentul de inertie total, pentreu turbina cu 8 spite (si din considerente geometrice de simetrie) devine:

$$I = \frac{M(R^2 + r^2)}{2} + \frac{m}{12}(4l^2 + w^2) + mR(l + R)$$

Randamentul este definit ca :

$$\eta = \frac{L}{Q_P}$$

L este lucrul mecanic efectuat de sistem iar in cazul nostru acesta este egal cu energia de rotatie $E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2}$, iar caldura primita este energia totala disipata de jetul de apa in urma saltului hidraulic, anume:

$$\Delta E = \rho g L D \frac{h_2^2 - h_1^2}{4}\left(2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 h_2}\right)$$

Din conditia ca $\eta_C = \frac{1}{2}$, reiese ca:

$$\frac{1}{2} = \frac{I\omega^2}{2\Delta E}\ ;\ \omega = \sqrt{\frac{\Delta E}{I}}$$

(b) (0.75 puncte) Stim ca pentru un ciclu Carnot care opereaza intre 2 temperaturi extreme, randamentul poate fi scris ca:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_0}{T} = 0.188$$

Cu corectiiile de masa de apa evaporata, randamentul devine (in cazul mentinerii aceleasi viteze de rotatoe):

$$\eta = \frac{L}{\Delta E - \Delta m g(h_2 - h_1) + \Delta m \lambda + c\Delta m(T - T_0)}$$

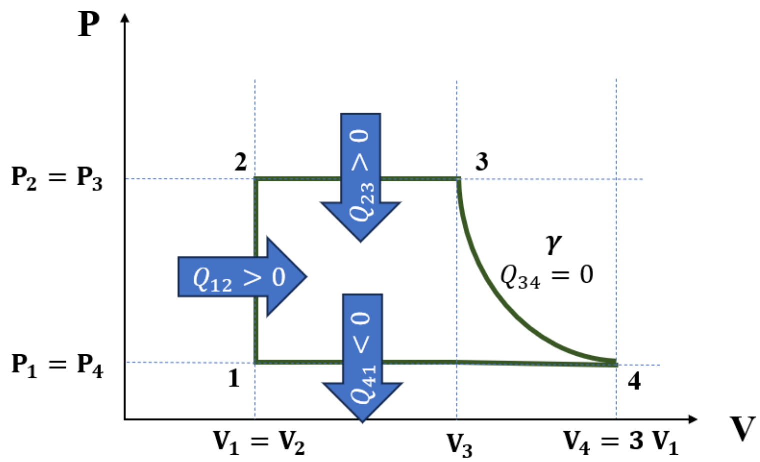
$$\Delta m = \frac{2\Delta E + \frac{3}{2}I\omega^2}{2g\Delta h - \lambda - c\Delta T}$$

Deci $2g\Delta h > \lambda + c\Delta T$, ceea ce fizic ar avea sens doar pentru $\Delta h > \frac{\lambda + c\Delta T}{2g} = 12.15\ cm$, teoretic, **DA** se poate ajunge la asemenea inaltimi.

(c) (1.5 puncte) Din schema de mai jos putem trage concluzia ca:

$$\eta = \frac{L}{Q_P} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_P} = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}}$$

corespunzator racirii izobare (4-1) si incalzirii izocore (1-2) si izobare (2-3). Caldura schimbata de-a lungul adibatei este nula.



$$\eta = 1 - \frac{C_P(T_4 - T_1)}{C_V(T_2 - T_1) + C_P(T_3 - T_2)}$$

Stiind ca : $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$ si ca pentru izobara (4-1) : $\frac{V_4}{V_1} = \frac{T_4}{T_1} = a$, dam factor comun C_V si T_1:

$$\eta = 1 - \frac{\gamma(a-1)}{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \gamma\left(\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Prin manipularea relatiilor bine cunoscute ale unei adibate, rezulta ca:

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{T_3}{aT_1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{aV_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{aT_2}{T_3}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_3}{T_1} = a^{\gamma}\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\gamma-1}$$

$\frac{T_3}{T_1} = b$, deci:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Asa ca:

$$\eta = 1 - \frac{\gamma(a-1)}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + \gamma\left(b - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}$$

Numeric, $\eta \approx 5.66\%$, un randament mic.

Eficienta celei de a 2 turbine devine (in urma colectarii vaporilor in incinta camerei turbinei Rankine)

$$\eta_{R1} = 1 - \frac{\gamma(a-1)}{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \gamma\left(\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{\Delta m\lambda}{C_V T_1}}$$

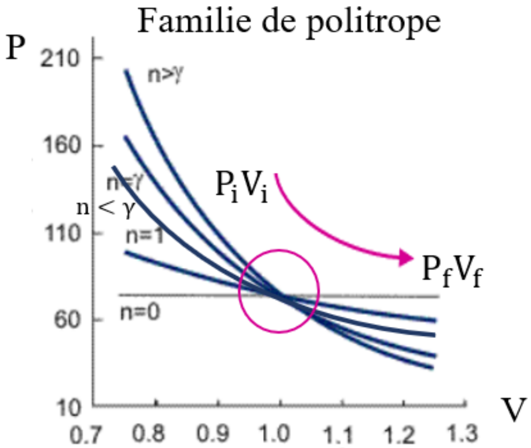
Pentru $\Delta m = 2kg$, $\eta_{R2} = 52\% > 50\%$, o valoare aproximativ 10 ori mai mare ca cea anterioara si mai mare decat cea a turbinei Pelton singulare (din b1).

Pentru, randamentul ansamblului de turbine cuplate (Rankine si Pelton b2), avem ca:

$$\eta_e = \eta_1 * \eta_{R2} = 9.78\% < 50\%$$

Asadar, este nevoie de o cantitate mult mai mare de apa vaporizata pentru a asigura imbuntatirea randamentului global (comparativ cu cel initial al turbinei Pelton) sau creșterea temperaturii maxime.

(d) (2 puncte) Pentru a evalua comportamentul unui ciclu Rankine politropic, ne vom referi la familia de politrope a unui gaz oarecare (vapori, in cazul relatat).



Intuitiv, pentru $n < \gamma$ (exemplu: izobara cu n=0 sau izoterma n=1), curba PV este mai plata iar caldura Q schimbata pe parcursul unei transformari (destinderi) $P_iV_i \longrightarrow P_fV_f$ este $Q > 0$. Sistemul primeste caldura pentru a facilita destinderea gazului, procesul fiind mai lent decat cel adiabatic in care gazul se destinde repede si energia se epuizeaza astfel incat (Q=0); sistemul are nevoie sa primeasca caldura pentru a face fata dinamicii gazului.
Cu cat indicele politrop creste cu atat scade energia, pana atinge punctul de 0 (transformarea adiabatica). De aici, $n > \gamma$, curba PV devine mai abrupta, volumul creste mai rapid iar temperatura scade, se cedeaza caldura mediului, deci $Q < 0$.
Aceste considerente se pot deduce matematic urmarind relatia data in problema, astfel ca,in apropierea punctului de intersectie a politropelor, de o parte si de alta a acestuia, putem presupune ca schimbarile de presiune si volum, $\Delta P << P_{i,f}$, $\Delta V << V_{i,f}$ sunt foarte mici:

$$P_f < P_i \ si \ V_f > V_i$$

$$\Delta Q_{politrop} = C_V(T_f - T_1) - \frac{P_fV_f - P_iV_i}{n-1}$$

$$\frac{P_fV_f - P_iV_i}{n-1} = \frac{P_f(V_f - V_i) + V_i(P_f - P_i)}{n-1} \approx C_V(T_f - T_i)\frac{\gamma - 1}{n-1}$$

unde am aproximat $P_f(V_f - V_i)$ lucrului mecanic efectuat intr-un proces izobar (care pentru o variatie de temperatura foarte mica se poate aproxima cu $C_P(T_f - T_i)$, iar $V_i(P_f - P_i)V$, de asemenea pentru un ΔT foarte mic, tinde spre $-C_V(T_f - T_i)$.
Deci, pentru intreaga caldura schimbata pe parcursul acestui proces obtinem:

$$Q = C_V(T_f - T_i)\frac{n-\gamma}{n-1}$$

Reiese imediat ca pentru $n > \gamma \longrightarrow Q < 0$ iar pentru $n < \gamma \longrightarrow Q > 0$.
In problema noastra, pentru a imbunatati randamentul turbinei Rankine, trebuie introdus un surplus energetic, deci sistemul primeste caldura $Q > 0 \longrightarrow n < \gamma$. In noua definitie a randamentului vom adauga contributia politropei la caldura primita, $\gamma \longrightarrow n$ in cadrul transformarilor termodinamice:

$$\eta = 1 - \frac{C_P(T_4 - T_1)}{C_V(T_2 - T_1) + C_P(T_3 - T_2) + C_V(T_4 - T_3)\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)}$$

$$\eta = 1 - \frac{\gamma(a-1)}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right) + \gamma\left(b - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right) + (a-b)\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)}$$

Randamentul este maxim daca: $\frac{d\eta}{dn} = 0$. Dupa prelucrarea derivatei, obtinem:

$$\gamma(1-\gamma)(a-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} + \gamma(\gamma-1)(a-1)(a-b)\frac{1}{(n-1)^2} = 0$$

$$\gamma(\gamma-1)\left((a-1)(a-b)\frac{1}{(n-1)^2} - (a-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

Ecuația este una transcendentala si se poate rezolva doar numeric, pe computer, motiv pentru care NU se cere solutia. De asemneea se observa ca relatia are sens fizic cand $n > 0$ doar pentru $a > b$ (in cazul nostru $a < b$, $3 < 3.2$). Daca $a < b$, matematic vorbind, trebuie sa indeplinim conditia ca $n < 1$, deci $Q > 0$. Daca n indeplineste si $n < 0$, pentru un asemenea proces, si $P_f > P_i$, deci gazul se comporta diferit, similar unui sistem care primeste o cantitae mare de caldura. Cu o sursa energetic suficient de puternica (clar nu o simpla turbina Rankine), din punct de vedere teoretic, un asemenea motor termic ar putea deveni realizabil. Totusi, la limita, aceast supozitie violeaza principiul I termodinamicii pentru ca un sistem nu poate primi o cantitate nelimitata de caldura. In concluzie, orice n numeric am gasi, un asemenea ciclu nu ar putea avea o utilizare practica (date tehnologiile actuale, momentan...)

Nota. Procesele politrope sunt procese termodinamice complexe. Pentru o tratare riguroasa si o intelegere profunda a evolutiei acestora, in teorie si practica, se recurge la calcul integral si analiza matematica de nivel inalt (tipic universitar). Calcule detaliate se pot gasi in cursurile open source ale facultatilor de fizica sau site-uri dedicate. Citez: UC Berkeley, https://www.tec-science.com/.

3. Randamentul turbinei Pelton (2 puncte)

Relativ cu turbina (spitele turbinei), curentul de apa are viteza $v_r = v - v_2$. In sistemul fix, inertiia, al albiei raului, viteza absoluta a jetului devine $v_0 = v_r + v = 2v - v_2$.
Calculam forta cu care jetul de apa ce curge cu debitul constant q actioneaza asupra spitei, in cazul in care turbina nu se afla in totaliate in apa (fluxul de apa este proportional cu raportul sectiunilor transversale ale turbinei si jetului de apa, $\frac{\pi h_2^2}{\pi R_0^2}$:

$$F = -\rho q(v_0 - v_2)\pi h_2^2 \frac{h_2^2}{R_0^2} = 2\rho q(v_2 - v)\frac{\pi h_2^4}{R_0^2}$$

Pentru a calcula randamentul, avem nevoie de lucrul mecanic efectuat, corespunzator miscarii turbinei in contact cu apa, sau derivata acestuia, puterea. Puterea o aflam din definitia momentului fortei, $T = \Omega P$, unde momentul fortei il putem caracteriza prin miscare de rotatie cu $\Omega = \frac{v}{R_0}$, reamintindu-ne ca v este viteza tangentiala a spitelor in contact cu apa.

$$\dot{L} = P = 2\rho q(v_2 - v)\frac{\pi h_2^4}{R_0^2} * R_0 * \frac{v}{R_0} = 2\rho q v(v_2 - v)\frac{\pi h_2^4}{R_0^2}$$

Randamentul devine (m este masa elemetului de flui cu debit constant:

$$\eta_R = \frac{\dot{L}}{\dot{Q_P}} = \frac{P}{\dot{Q_P}}$$

$$\dot{Q_P} = \dot{m}\frac{v_2^2}{2} = q\frac{v_2^2}{2}$$

$$\eta_R = \frac{4\rho q v(v_2 - v)}{q v_2^2} * \frac{\pi h_2^4}{R_0^2}$$

Subiect propus de Diana-Ștefania Catană, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și ELI-NP, LDED