Subiecte "BE A FEYNMAN "- 16 Noiembrie 2024

- Fiecare problemă valorează 10 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.
- Rezolvați fiecare problemă pe foi separate, completând pe fiecare pagină toate rubricile prezente: pagina, numele echipei și problema pe care o rezolvați (numărul său, conform acestui document).
- Scrieți eventualele întrebări cu privire la subiect pe o foaie de hârtie, apoi oferiți foaia supraveghetorului vostru. Menționați în dreptul fiecărei întrebări numărul problemei și autorul acesteia, confom foii cu subiecte. Veți primi răspunsul la întrebări sub forma unui mesaj scris.

PROBLEMA I. CICLUL ATKINSON

James Atkinson a fost un inginer britanic care a proiectat mai multe motoare cu ardere internă. Ciclul termodinamic care îi poartă numele este o modificare a ciclului Otto, menită să îi îmbunătățească eficiența. Compromisul pentru obținerea unei eficiențe mai mari este o scădere a lucrului mecanic efectuat pe ciclu. Ciclul Atkinson idealizat constă în următoarele procese reversibile:

$$
\begin{aligned}
1 \to 2 &: \text{compresie adiabatică}\\
2 \to 3 &: \text{încălzire izocoră}\\
3 \to 4 &: \text{încălzire izobară}\\
4 \to 5 &: \text{expansiune adiabatică}\\
5 \to 6 &: \text{răcire izocoră}\\
6 \to 1 &: \text{răcire izobară}
\end{aligned}
$$

Se consideră cunoscute volumele V_1, V_2, V_6, presiunile p_1 și p_3, temperatura T_5, precum și numărul N de moli de gaz. Energia internă a gazului ideal este de forma $U = cNRT$, unde c este o constantă ce ține de natura gazului, iar R este constanta universală a gazului ideal.
Cerințe:

(a) (1 punct) Trasați diagrama ciclului Atkinson în coordonate $p - V$. Reprezentați pe diagramă porțiunile în care gazul primește sau cedează căldură.

(b) (3 puncte) Aflați valorile necunoscute ale parametrilor gazului (volum, presiune, temperatură) în fiecare dintre punctele $1 - 6$.

(c) (3 puncte) Aflați lucrul mecanic efectuat pe fiecare porțiune a ciclului și lucrul mecanic total efectuat într-un ciclu.

(d) (2 puncte) Calculați căldura primită de gaz pe fiecare porțiune a ciclului și căldura totală primită pe parcursul unui ciclu.

(e) (1 punct) Calculați randamentul ciclului Atkinson.

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA II. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A LEGII STEFAN-BOLTZMANN

Un corp negru este un model fizic pentru un corp care absoarbe toată radiația primită și emite radiație electromagnetică. Temperatura unui asemenea corp se stabilește prin echilibrul între radiația emisă și cea incidentă (primită). Modelul este o idealizare a corpurilor reale, numite corpuri gri, care pot, de exemplu, să reflecte o parte din radiația incidentă. Presupunem că radiația emisă de un corp negru în unitatea de timp pe unitatea de suprafață respectă o formulă de tip lege de putere:

$$P/S = \sigma T^n$$

Aici T este temperatura absolută a sursei, iar σ și n sunt constante. Din considerente dimensionale, exponentul n trebuie să fie întreg. Prin P am denumit puterea emisă de corp, iar prin S, suprafața sa.

Putem verifica această lege folosind un bec cu un fir care are o rezistență ce depinde puternic de temperatură. Colectând valori pentru U și I, putem deduce rezistența sa (deci și temperatura, cunoscând constantele materialului), în timp ce tensiunea produsă de o fotodiodă (V) ne oferă puterea radiată de acest corp. Presupunem o dependență pătratică pentru rezistența filamentului becului de temperatură (t, exprimată în scara Celsius), conform expresiei:

$$R(t) = R_0\left(1 + \alpha t + \beta t^2\right),$$

Aici $R_0 = 0.15\ \Omega$, $\alpha = 4.82 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$ și $\beta = 6.76 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{K}^{-2}$.
Tabelul cu datele experimentale obținute este:

U(V)	I(A)	V (mV)
1	2.2	0.15
2	2.8	0.62
3	3.45	1.3
4	4	2.2
5	4.45	3.2
6	4.9	4.45
7	5.3	5.9
8	5.7	7.5

Cerințe:

(a) (2 puncte) Calculați temperatura absolută a plăcii pentru fiecare determinare experimentală.

(b) (2 puncte) Pornind de la formula presupusă în enunț pentru radiația emisă de corpul negru, propuneți o metodă prin care să obțineți o dependență liniară între două mulțimi de valori calculate pe baza valorilor experimentale. Indicație: pe baza datelor experimentale se pot calcula mărimi (pe care va trebui să le identificați) între care se poate stabili o dependență liniară.

(c) (6 puncte) Folosind metoda propusă anterior, calculați valoarea rezultată din experiment pentru n, precum și eroarea acesteia. Având în vedere informațiile din enunț, propuneți o valoare pentru n, în baza experimentului.

Indicație: Fie o mulțime de N perechi de date experimentale (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N). Presupunând o dependență între acestea de forma $y = Ax + B$, coeficienții A și B iau următoarele valori pentru care abaterea dintre dreapta dusă printre puncte și datele experimentale este minimă (metoda celor mai mici pătrate):

$$A = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i - A \sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Următorii coeficienți pot fi folosiți pentru calculul erorilor:

$$S_x = \sum_{i=1}^{N} x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^{N} y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^{N} y_i^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{N(N-2)} \left[N S_{yy} - S_y^2 - A^2 \left(N S_{xx} - S_x^2 \right) \right]$$

$$s_A^2 = \frac{N s_\varepsilon^2}{N S_{xx} - S_x^2}$$

$$s_B^2 = s_A^2 \frac{1}{N} S_{xx}$$

Pnetru $N = 8$ măsurători, eroarea se poate scrie pentru un grad de încredere de 99.9% de forma $\pm 5.041 s_A$ pentru A și $\pm 5.041 s_B$ pentru B.

Sursa datelor folosite în acest experiment este documentația producătorului *PHYWE*, disponibilă la adresa web:
https://www.phywe.com/experiments-sets/university-experiments/stefan-boltzmann-s-law-of-radiation-with-an-amplifier_9515_10446/
Notă: În această problemă s-a folosit punctul în locul virgulei pentru separarea zecimalelor unui număr.

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA III. ELEMENTE DE FIZICĂ MATEMATICĂ

În această problemă, vom rezolva câteva ecuații diferențiale corespunzătoare unor fenomene fizice foarte diferite, care sunt corelate prin ideea de oscilație. Oscilațiile sunt surprinse elegant prin folosirea numărului imaginar i, cu proprietatea $i^2 = -1$. Cu alte cuvinte, în loc să folosim numere reale, este mai convenabil pentru noi să lucrăm cu numere complexe.

Exponențialele sunt de obicei asociate cu o creștere sau descreștere rapidă. Cu toate acestea, prin folosirea numerelor complexe, „creșterea" și „descreșterea" imaginară pot fi traduse în oscilații prin identitatea lui Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(a) (1,5 puncte) Forma obișnuită a principiului al doilea al lui Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) nu mai este valabilă atunci când trecem într-un sistem de referință în rotație, unde forțele centrifuge și Coriolis trebuie luate în considerare. Principiul al doilea al lui Newton ia atunci forma:

$$\vec{F} = m(\vec{a} + 2\vec{v} \times \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}))$$

Pentru o particulă liberă (asupra sa nu acționează nicio forță externă), aflată în mișcare în planul $x - y$ într-un sistem de referință care se rotește în jurul axei z cu viteza unghiulară Ω, se obține din principiul al doilea al lui Newton un sistem de ecuații diferențiale cuplate:

$$0 = \ddot{x} + 2\Omega\dot{y} - \Omega^2 x$$
$$0 = \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y$$

unde punctele reprezintă derivate în raport cu timpul. Definind $\eta = x + iy$, arătați că ecuațiile de mai sus sunt echivalente cu următoarea ecuație unică (în variabilă complexă):

$$0 = \ddot{\eta} - 2i\Omega\dot{\eta} - \Omega^2\eta$$

(b) (1,5 puncte) Ecuația de mai sus este identică din punct de vedere matematic cu ecuația oscilatorului armonic amortizat și poate fi rezolvată presupunând o soluție de tipul $\eta = \alpha e^{\lambda t}$. Introducând această soluție în ecuație, ce valoare trebuie să ia λ?

(c) (2 puncte) Folosind răspunsul vostru de la partea (b) și definind $\alpha = Ae^{i\phi}$, unde A și ϕ sunt reale, găsiți soluțiile $x(t)$ și $y(t)$. Aceasta este traiectoria unei particule staționare în raport cu axa de simetrie[1].

(d) (1,5 puncte) Ecuația de difuzie unidimensională (denumită și „ecuația căldurii") este dată (pentru o particulă liberă) de:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

În această ecuație ψ este mărimea fizică supusă difuziei (de exemplu, temperatura).
O undă unidimensională poate fi scrisă ca $\sim e^{ikx}$ (valorile mai mari ale lui k corespund undelor care produc oscilații pe scări mai mici de lungime). Presupunând o soluție de tipul $\psi(x,t) = Ae^{ikx - i\omega t}$, exprimați ω în funcție de k. O relație de acest tip se numește „relație de dispersie".

(e) (1 punct) Ecuația Schrödinger, dedusă în cadrul mecanicii cuantice nerelativiste, are forma:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Aici ψ reprezintă funcția de undă a unei particule și se folosește, de exemplu, pentru a studia densitatea de probabilitate pentru localizarea particulei („unde este probabil că vom găsi particula").
Folosind răspunsul vostru de la partea (d), care este relația de dispersie a ecuației Schrödinger?

(f) (1 punct) Dacă energia unei cuante este $E = \hbar\omega$ și impulsul său este $p = \hbar k$, arătați că relația de dispersie găsită în partea (e) se aseamănă cu expresia clasică pentru energia cinetică a unei particule, E $= \frac{1}{2}mv^2$.

(g) (1,5 puncte) Teoria relativității postulează în schimb că energia unei particule este dată de $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. În conformitate cu aceasta, putem încerca să presupunem o versiune relativistă a ecuației Schrödinger:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

Aceasta este numită ecuația Klein-Gordon. Folosind aceeași presupunere ca înainte, găsiți ω în funcție de k.

Notă: Dacă sunteți atenți, ar trebui să obțineți că există un spectru continuu infinit de stări de energie care se extinde până la $-\infty$ [2].

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

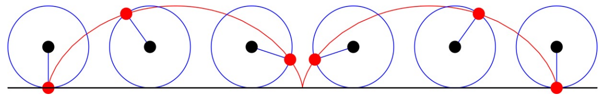
[1] Deși nu este necesar pentru această problemă, o altă opțiune de soluție presupusă ar fi $\eta = \beta e^{\lambda t}$. Puteți testa această soluție după concurs.

[2] Câteva detalii suplimentare, pe care le puteți citi după concurs: Această problemă aparent matematică sugerează existența antimateriei și, în final, ne arată că trebuie să formulăm teoria cuantică a câmpurilor pentru a descrie corect fizica cuantică relativistă. Un raționament de acest tip a fost folosit din punct de vedere istoric în secolul al XX-lea.

PROBLEMA IV. PENDULUL CICLOIDAL

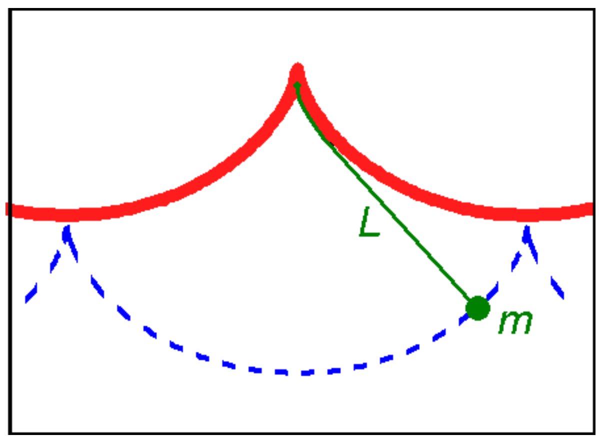
Fizicianul olandez Christiaan Huygens a proiectat, în secolul al XVII-lea, un pendul al cărui studiu teoretic este interesant, mai cu seamă prin prisma comparației cu pendulul gravitațional. Curba descrisă de acest pendul, este o cicloidă, adică acea curbă descrisă de un punct de pe suprafața unei roți aflate în mișcare uniformă. Problema își propune studiul unui asemenea pendul, în modelul ideal, fără frecări.

(a) (1 punct) Definind φ ca fiind unghiul (măsurat în sens trigonometric) descris de raza vectoare a unui punct de pe o roată ce descrie o rotație completă, deduceți ecuațiile parametrice pentru coordonatele carteziene ale unui punct de pe cicloidă, ca funcție de parametrul φ. Se consideră că cercul din care provine cicloida are rază R. Puteți folosi figura de mai jos ca punct de plecare.



Sursă imagine: Wolfram MathWorld, https://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html

(b) (1,5 puncte) Considerați un corp descriind arcul inferior de cicloidă, precum în figura de mai jos. Exprimați energia totală a acestui corp, cunoscându-i-se masa m și raza R a cercului din care provine cicloida. Indicație: transformarea $y \to -y$ transformă cicloida din figura de la punctul (a), care are un punct de maxim, într-o cicloidă de felul celei reprezentate în figura de mai jos, corespunzătoare pendulului cicloidal (deci are un punct de minim - punctul de echilibru).



Sursă imagine: 3piecesuits, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15668991

(c) (3 puncte) Stabiliți dacă energia totală a corpului se modifică și exprimați matematic concluzia la care ați ajuns. Efectuând eventual substituția $u = \cos\frac{\varphi}{2}$, deduceți perioada acestui pendul.

(d) (0,5 puncte) Comparați rezultatul, precum și modelul din spatele său, cu pendulul gravitațional.
Substituția propusă la subpunctul (c) are avantajul de a facilita rezolvarea ecuației diferențiale, însă este foarte greu de interpretat fizic. De aceea, o mai bună alegere a coordonatelor în funcție de care exprimăm poziția punctului poate face problema mult mai ușor de înțeles. Vom căuta să exprimăm poziția corpului pe cicloidă în funcție de distanța, măsurată pe curbă, de la poziția sa inferioară. Spre a o putea folosi drept coordonată, trebuie să îi oferim un sens pozitiv, ales arbitrar către dreapta (altfel nu am ști la care punct, din stânga sau din dreapta față de cel inferior, ne referim).

(e) (1 punct) Pe fiecare interval infinitezimal de timp corpul se deplasează cu viteze practic constante pe cele două axe, descriind un segment infinitezimal linear. Exprimați lungimea acestui segment, în funcție de raza cercului de proveniență și de unghiul φ.

(f) (1 punct) Folosind o analogie cu relațiile dintre elongația și viteza unui oscilator armonic, aflați lungimea totală a unei cicloide.

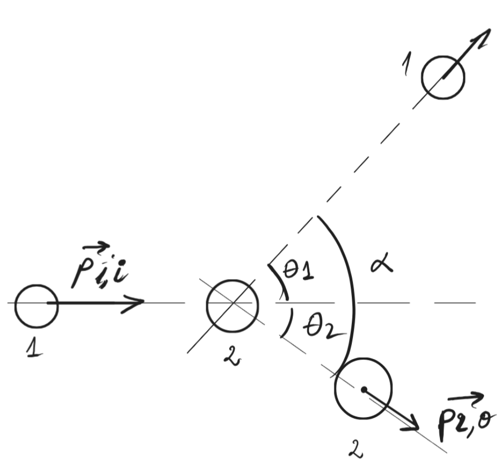
(g) (1 punct) Rescrieți ecuația oscilatorului în funcție de noua coordonată (lungimea arcului de curbă, calculată la (e)).

(h) (1 punct) Cunoscând drept condiții inițiale coordonata și viteza de variație a acestei coordonate, exprimați condiția ca amplitudinea de oscilație să aibă sens fizic.

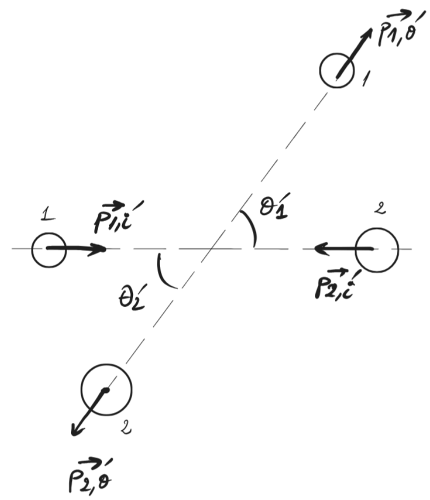
Observație: După cum ați observat în timpul rezolvării problemei, putem folosi mai multe tipuri de coordonate pentru a descrie poziția unui punct pe o curbă. Din punctul de vedere al geometriei diferențiale, găsirea unei funcții bijective între un interval deschis real și o vecinătate deschisă a unui punct de pe curbă se numește „parametrizare”. În această problemă am folosit mai multe parametrizări: prin unghiul φ, prin variabila u și prin lungimea de arc. Această din urmă parametrizare se numește „naturală” sau „canonică”. Esențial este că ajungem la ecuația oscilatorului armonic indiferent de parametrizarea pe care o folosim.

Subiect propus de Andrei Marin, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Teoretică, IFIN-HH

PROBLEMA V. COLIZIUNI



(a) Sistemul laboratorului



(b) Sistemul centrului de masă

*În tratarea problemei, folosiți convențiile de notare: i/o (in/out) pentru starea de dinainte(de după) coliziune; particulele indexate cu 1 și 2; "prim" pentru sistemul centrului de masă. Deci:

- impulsuri inițiale în sistemul laboratorului: $\vec{p}_{1,i}, \vec{p}_{2,i}$; impulsuri finale în sistemul laboratorului: $\vec{p}_{1,o}, \vec{p}_{2,o}$
- impulsuri inițiale în sistemul centrului de masă: $\vec{p'}_{1,i}, \vec{p'}_{2,i}$; impulsuri finale în sistemul centrului de masă: $\vec{p}'_{1,o}, \vec{p}'_{2,o}$

**Sistemul centrului de masă este un sistem de referință inerțial solidar cu centrul de masă al particulelor implicate în coliziune. El se mișcă cu o viteză dată de impulsul total în sistemul de referință folosit. În sistemul centrului de masă, impulsul total al sistemului este 0.

Sistemul laboratorului este un sistem de referință în care se consideră în repaus unul dintre cele două corpuri (ex. particula 2-"ținta").

***Problema se va trata din punct de vedere al mecanicii clasice. Pentru a trece de la un sistem de referință la altul, aveți în vedere relativitatea galileiană.

Exprimați rezultatele finale în funcție de m_1, m_2 (masele particulelor), viteza $v_{1,i} = |\vec{v}_{1,i}|$.

(a) (1,5 puncte) Exprimați vitezele și impulsurile din sistemul centrului de masă.

(b) (1,5 puncte) Demonstrați că vectorul vitezei relative este mărime invariantă (nu depinde de sistemul de referință ales) și că modulul acesteia este mărime conservată în urma coliziunii. Demonstrați că unghiul χ prin care viteza relativă își schimbă orientarea în urma coliziunii este de asemenea invariant.

(c) (2 puncte) Folosiți cantitățile invariante de la subpunctul b) pentru a calcula vitezele finale în sistemul laboratorului.

(d) (1,5 puncte) Exprimați unghiurile din sistemul laboratorului: θ_1, θ_2 de deviere de la direcția inițială de mișcare a particulelor și unghiul final dintre ele, α. În ce condiții este acest unghi egal cu 90^o?

(e) (1 punct) Exprimați pierderea relativă de energie pentru particula 1 în sistemul laboratorului, ca funcție de unghiul χ. În ce condiții transferul de energie de la proiectil la țintă este ideal?

(f) (2,5 puncte) Presupuneți că particulele de tip 2 formează un gaz ce ocupă un spațiu suficient de mare, cu densitatea volumică n, la temperatura T. Astfel, coliziunile se întâmplă aleator, ne-existând o direcție preferată în spațiu. Presupuneți că $m_1 \ll m_2$ și că energia inițială a particulei 1 este mult mai mare decât energia termică a gazului.

Ce distanță medie este parcursă în gaz de către particula 1, pentru ca energia acesteia să fie atenuată până la termalizarea cu gazul? Estimați timpul necesar pentru a ajunge la această termalizare.

Subiect propus de Andrei Opincă, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Departamentul de Fizică Nucleară, IFIN-HH

PROBLEMA VI. MECANICĂ CEREASCĂ

1. Noțiuni de bază

Un domeniu de bază al Astrofizicii clasice este mecanica cerească, ramură ce se ocupă cu studiul mișcării corpurilor cerești și interacțiunilor dintre acestea din perspectiva mecanicii clasice. Istoric, această ramură a astrofizicii a apărut în urma aplicării, de către Sir Isaac Newton, a principiilor mecanicii clasice și a legii atracției universale pentru determinarea orbitelor corpurilor cerești. Newton a demonstrat un set de trei rezultate empirice știute la vremea respectivă pe baza noii sale teorii. Aceste rezultate sunt astăzi cunoscute sub numele de "legile lui Kepler" și sunt în număr de trei:

1. Orbitele planetelor în jurul Soarelui sunt elipse, având Soarele într-unul din cele două focare.
2. Segmentul ce unește Soarele cu planeta mătură arii egale în intervale de timp egale (viteza areolară este constantă).
3. Pătratul perioadei unei planete este direct proporțional cu semiaxa mare la puterea a treia.

Formula completă (demonstrată ulterior de Newton), este

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m+M)} \tag{1}$$

unde $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 este constanta atracției universale, iar a se numește "semi-axa mare" a elipsei. În cele ce urmează, vom discuta despre câteva proprietăți geometrice și orbitale ale elipsei.

Din punct de vedere matematic, elipsa se definește ca *locul geometric al tuturor punctelor pentru care suma distanțelor față de două puncte fixe, numite focare, este egală.* O reprezentare în coordonate carteziene se regăsește în Fig.1a, iar o reprezentare a unui sistem planetar în Fig.1b. Următoarele mărimi și relațiile dintre ele sunt relevante pentru noi:

- a - semiaxa mare
- c - distanța focală
- $e = \frac{c}{a} \in [0, 1)$ - excentricitatea
- $r_{min} = a - c = a(1-e)$, $r_{max} = a + c = a(1+e)$, $r_{min} + r_{max} = 2a$
- $F = F_{cp} \Rightarrow G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$, unde v și r sunt variabile în timp
- $E_c = \frac{mv^2}{2}$, $E_p = -G\frac{mM}{r}$, $E = E_c + E_p = -G\frac{mM}{2a} = const.$

Pentru excentricități mici, traiectoria se poate aproxima cu un cerc, Soarele este în centrul cercului și mișcarea devine una circulară uniformă ($r = const.$, $v = const.$) - vezi Fig.1c.

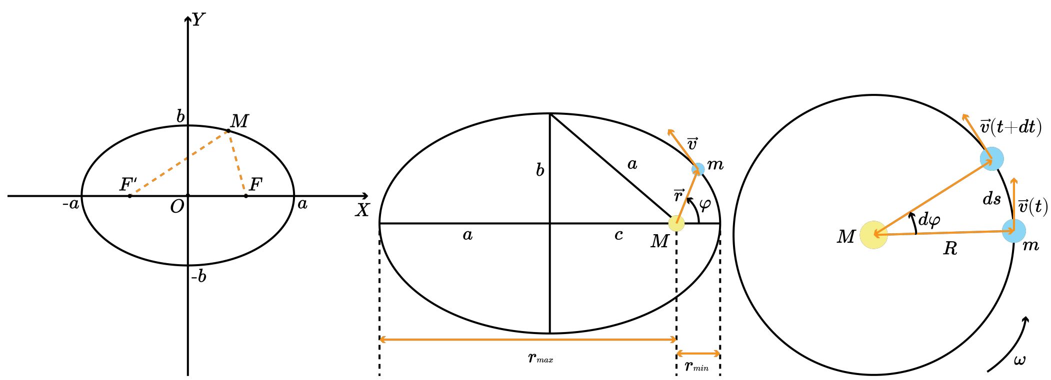


Figura 1: a) elipsa în plan; b) traiectoria eliptică; c) traiectoria circulară

Poziția în care corpul de pe orbită se află la distanța r_{min} de focarul în care se găsește corpul masiv se numește "perigeu", iar cel opus se numește "apogeu".

2. Satelit în jurul Pământului

Se trimite un satelit (de masă neglijabilă) pentru a explora Pământul, acesta orbitând planeta pe o traiectorie eliptică. Datele experimentale arată că satelitul atinge distanța minimă $d_{min} = 1500$ km și distanța maximă $d_{max} = 9000$ km de suprafața planetei (a cărei rază și masă sunt $R = 6000$ km și $M = 5 \cdot 10^{24}$ kg) - vezi Fig.2. Să se afle:

(a) (0,5 puncte) Semiaxa mare a orbitei.

(b) (0,5 puncte) Excentricitatea elipsei.

(c) (0,5 puncte) Perioada orbitală, cunoscându-se $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

(d) (0,5 puncte) Cunoscând semiaxa și perioada de orbită a Pământului ($a_P = 149.6 \cdot 10^6$ km, $T_P = 1$ an), să se estimeze masa Soarelui.

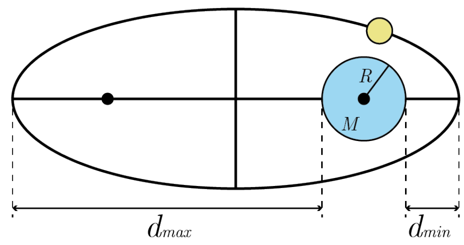


Figura 2: Traiectoria satelitului

3. Ciocnire cu modificarea orbitei

(3 puncte) Un satelit de masă m_1 orbitează o planetă de masă M pe o traiectorie circulară de rază R. Acesta se ciocnește cu un corp de masă m_2 care se afla în cădere liberă spre acea planetă, pe direcția ce trece prin centrul acesteia - vezi Fig.3. Ca urmare a impactului (despre care vom considera că are loc practic instantaneu), corpul se alipește de satelit și ansamblul își va modifica orbita într-una eliptică, de distanță la perigeu $r_p = R/2$. Determinați viteza corpului care lovește satelitul, imediat înaintea ciocnirii.

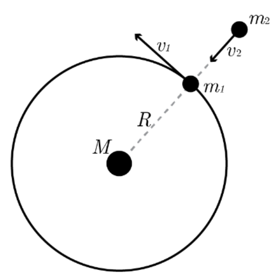


Figura 3: Cele două corpuri și vitezele lor imediat înainte de ciocnire

4. Întâlnirea unui satelit cu nava-mamă

(3 puncte) O navă cosmică de masă M ce are atașată un satelit de masă m orbitează Pământul pe o orbită circulară de rază $2R$, unde R este raza planetei. La un moment dat, satelitul se decuplează instantaneu și își continuă mișcarea pe o traiectorie eliptică, a cărei distanță la apogeu este $r_a = 16R$ - vezi Fig.4. În urma acestui proces, nava îşi păstrează traiectoria inițială. Știind că cele două corpuri (care pot fi considerate puncte materiale) se reîntâlnesc după exact patru perioade ale navei, determinați raportul maselor m/M.

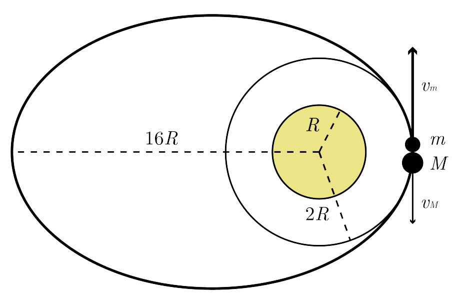


Figura 4: Cele două orbite

5. Investigarea unui sistem binar

Un sistem binar este format din două stele de mase M_1 și M_2 ce orbitează în jurul centrului de masă pe traiectorii circulare - vezi Fig.5, distanța dintre cele două corpuri fiind a.

(a) (1 punct) Arătați că, din punct de vedere al perioadei, forței de atracție și energiei potențiale, sistemul poate fi echivalat cu un altul în care masa redusă $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}$ orbitează pe un cerc de rază a în jurul masei totale $M = M_1 + M_2$, aflată în repaus (masa redusă este neglijabilă față de cea totală).

(b) (1 punct) Ce condiție trebuie îndeplinită ca un telescop cu diametrul $D = 0.61$ m să poată vedea sistemul ca două entități diferite (aflate la distanța $d = 3 \cdot 10^{13}$ km de observator) în lungimea de undă $\lambda = 660$ nm?

Indicație. Unghiul minim sub care trebuie să se vadă distanța dintre două stele pentru a putea fi văzute separat de un telescop este dat de

$$\delta\theta\,[\text{rad}] = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{2}$$

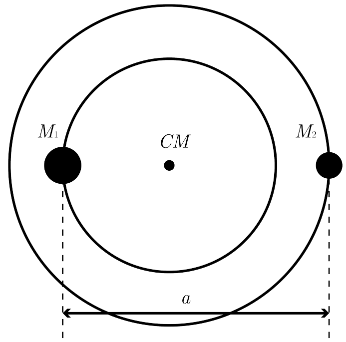
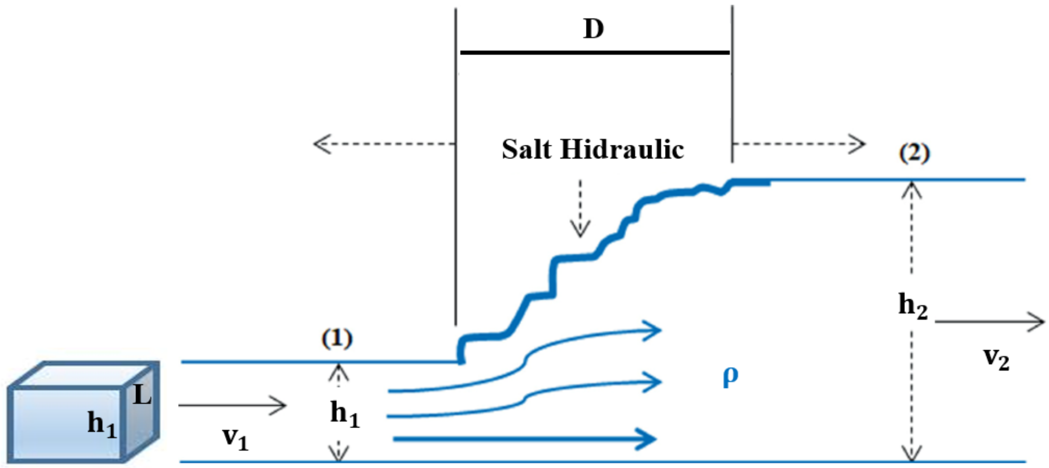


Figura 5: Sistemul binar

Subiect propus de Mihai Dragomir, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și Liceul Teoretic „Mihai Ionescu”, București

PROBLEMA VII. TURBINE ȘI ENERGIA SALTULUI HIDRAULIC

Salturile hidraulice sunt fenomene intens analizate in inginerie, hidroenergie si fizica aplicată. Acestea apar la confluența a 2 jeturi cu viteze de curgere diferite. De exemplu, ele pot fi observate la gurile de vărsare ale afluenților râurilor sau chiar a cascadelor. Energia cinetică în exces se disipă sub formă de energie potentială (gravitațională) și căldură (si de asemenea turbulente hidrodinamice), curentul de apă "sărind" la o înalțime h_2, după cum se poate observa în desenul de mai jos.

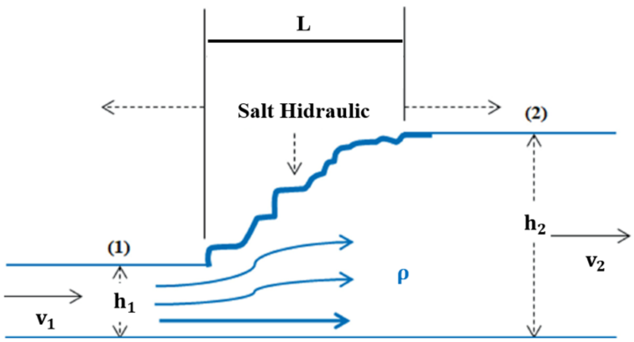


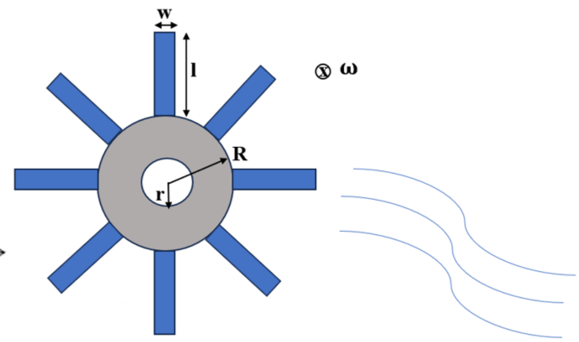
1. Înțelegerea fenomenului

(2,5 puncte) Calculează **energia potențială totala disipată in urma saltului hidraulic pe lungimea D** ca functie de g, h_1 si v_1. De asemenea calculeaza si **energia totala disipata pe unitatea de masa (specifica), precum si cea totala** ca functie de g, h_1 si h_2.
Se consideră cunoscute: densitatea apei ρ, viteza v_1 a jetului de apa înainte de salt, înalțimea inițială/nivelul jetului de apă h_1, lațimea zonei paralelipipedice prin care se propagă apa (albia râului), L, lungimea porțiunii de albie de-a lungul căreia se produce saltul hidraulic D si accelerația gravitațională g. Modelul elementului de volumul de fluid care curge poate fi aproximat cu unul paralelipipedic. Forțele de frecare/vâscozitate fluide se consideră neglijabile, exista pierderi de căldură de care nu ne voma ting in acest subpunct, iar masa de apă care curge rămâne constantă (nu există scurgeri, fluxul/debitul rămâne constant).
Hint: Consideră ca viteza cu care apa curge este una medie.
Pentru aproximarea volumului de apă care curge, precum și a celorlalte mărimi ce intra în dinamica sistemului (inclusiv energia totala a volumului de apa), consideră că centrul de greutate se află la jumătatea înalțimii volumului studiat.

2. Turbine de apă si aer

În secțiunea care urmează vom evalua fezabilitatea folosirii energiei potențiale disipate în urma saltului hidraulic pentru punerea in funcțiune a unei turbine de apa limitată de randamentul unui ciclu similar celui Carnot sau cel standard (al turbinei Pelton, utilizată pentru marile hidrocentrale ce valorifica caderile uriase de apa). Curentul de apă antrenează mișcarea de rotație a turbinei în jurul axei sale centrale.
Corpul turbinei (fără mecanismul de fixare si acționare din partea apei) este alcătuit dintr-un rotor si spițe. În modelul nostru simplificat vom aprecia rotorul ca un cilindru masiv de rază R, găurit în interior pentru poziționarea arborelui, golul cilindric având raza r. Pe rotor sunt dispuse uniform, simetric, 8 spițe; pentru simplitate, spițele vor avea o forma paralelipipedică, de lungime l, lățime w și grosime d. Suprafața de contact dintre rotor și spițe este netedă. Se urmărește ca după o perioadă scurtă de timp viteza unghiulară de rotație ω să devină constantă, astfel ca mișcarea de rotație să fie uniformă si randamentul unei astfel de turbine să rămână constant.





(a) (1,25 puncte). **Care este viteza unghiulară de rotație uniforma ω pentru care sistemul ajunge la un randament de $\eta_C = 50\%$? Nu** integrăm în calculele noastre reculul inițial al spițelor la contactul cu apa. Ne concentrăm doar pe mișcare lor (eventual) uniformă. Ca și condiții inițiale, ne referim la turbina aflată **deja** în mișcare și la fluxul de apă care aproximativ **instantaneu** antreneaza spițele turbinei, respectiv, întreaga turbină.

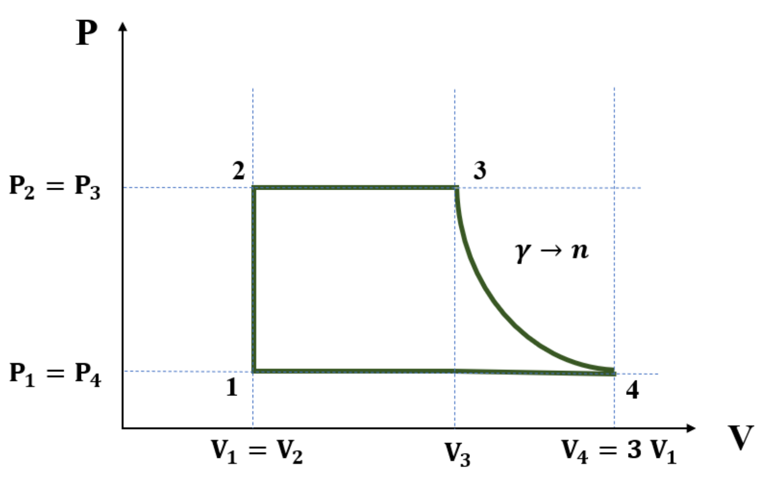
Se știe că: $I_{cilindru} = \frac{M(R^2+r^2)}{2}$ pentru rotor (față de axa perpendiculară pe rotor și care trece prin centrul acestuia) și pentru o spiță de lungime l si lățime w, **față de o axă care trece prin centrul de greutate al spiței, perpendiculară pe fața definită de laturile l și w**, $I_{spiț} = \frac{m}{12}(l^2 + w^2)$.

Vom presupune acum că pierderile de căldură ale jetul de apă, în urma punerii în mișcare a turbinei, conduc la evaporarea unei cantități de apă Δm.

(b) (0,75 puncte). Cât ar trebui să fie **cantitatea de apă evaporată** pentru ca noul randament să devină egal cu randamentul unui ciclu Carnot în care temperatura termostatului rece (temperatura minimă, anume temperatura medie a jetului de apa) este $T_0 = 30^0\ C$ și cea a termostatului cald (temperatura maximă, de evaporare) este $T = 100^0\ C$? Care sunt limitele pentru care saltul jetului de apa, $\Delta h = h_2 - h_1$, din supoziția procesului termodinamic anterior ar avea sens fizic? Este fezabil?
Căldura specifică a vaporilor de apa este $c = 1.92\ kJ/kg\ K$ iar căldura latentă de vaporizare este $\lambda = 2260\ KJ/kg$, iar $g = 10\ ms^{-2}$. Se neglijează capacitatea calorică a cantității de apa din jet care nu se evapora, a turbinei și orice fenomen de dilatare termică.

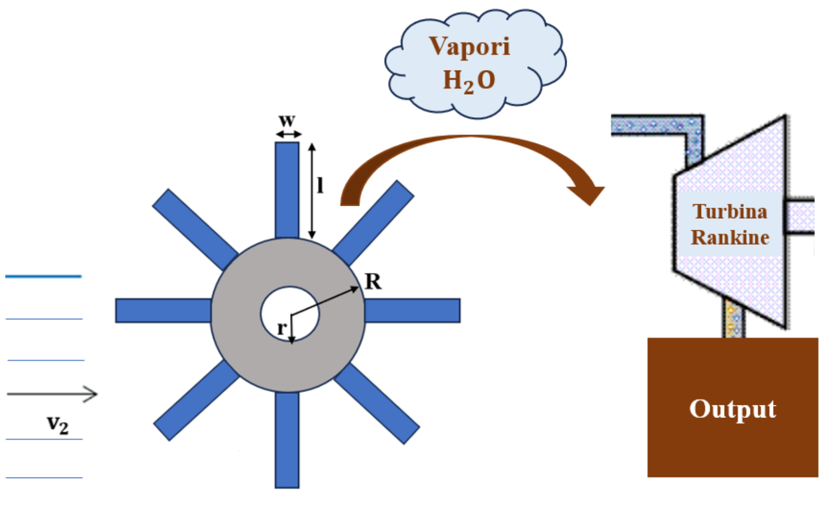
Pentru a ne crea o idee despre potențialul energetic al hidro-turbinelor se intenționează îmbunatățirea randamentului final și dezvoltarea unei scheme care utilizează eficient cantitatea de apa evaporată. Astfel, la turbina Pelton se atașează **o turbină care urmează un ciclul termodinamic asemănător celui Rankine, corespunzător motoarelor cu abur**. Pentru punerea in funcțiune a unui motor de tip Rankine avem nevoie ca **o cantitate de noua apă $\Delta m = 2\ kg$ vaporizata sa fie colectata**, vaporii fiind utilizați ca fluid de lucru. In acest caz, **sistemul jet-turbină Pelton cu randamentul dat in b2 cedează mediului (si turbinei Rankine) o cantitate de căldură**, care conduce la vaporizarea unei noi cantitati de apa ce va fi utilizata in angrenarea turbinei Rankine. Această nouă cantitate de apă nu intră în calculele pentru turbina Pelton (cantitate independenta).

Cel mai ușor mod de reprezentare a unui ciclu de tip Rankine este redat mai jos : 2 isobare (prima de incalzire si ultima de racire), o izocoră (de incalzire) și o adiabată prin care gazul se destinde.



(c) (1,5 puncte). Aflați **randamentul echivalent al turbinei Rankine si a sistemului de rurbine înseriate**. Cum este acesta comparativ cu cel al turbinei Pelton de la punctul b1 (înainte de evaporare)?

Se cunosc: coeficientul adiabatic al vaporilor de apă $\gamma = 1.3$ și factorul maxim de destindere $a = \frac{V_4}{V_1} = 3$, precum și cele 2 temperaturi de operare (maximă și minimă) $T_1 = T = 100^0\ C$ și $T_3 = bT = 3.2 * T$ (limitare tehnica) si caldura specifica la volum constant a vaporilor de apa $C_V = 3.77 KJ/kgK$. Ecuația rezultanta se punctează maxim.



În pasul următor, ne concentrăm asupra ciclului ideal Rankine și dorim sa îl îmbunătățim. Înlocuim astfel adiabata 3-4 cu o **politropă** oarecare de indice politropic n și evaluăm randamentul singular al ciclul "Rankine" proaspăt obținut.

(d) (2 puncte). **Evaluează** acest randament față de cel al ciclului de tip Rankine clasic (imaginea 3) și **explicați** cum ar trebui sa arate valoarea lui **n** (metodă analitică, NU se cere calcul direct) pentru care noul randament atinge **un maxim**. **Pentru simplitate, egalează numărul de moli de gaz (vapori) cu 1 in toate calculele**.
În analiza ta, ai in vedere următoarele condiții și justificați alegerea facută pentru validarea ecuatiei finale.

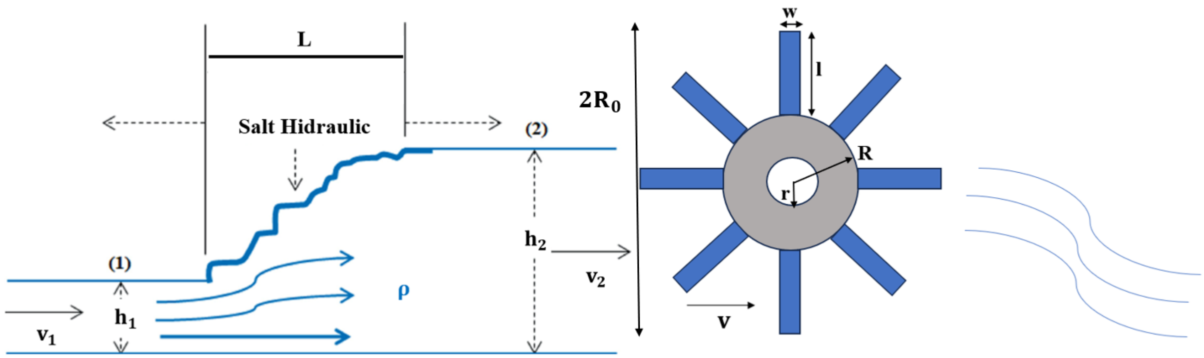
- $n < \gamma$
- $n > \gamma$

Căldura schimbată cu mediul în urma unui proces politrop între stările finală și inițială ale unui mol de gaz cu capacitatea calorică la volum constant C_V se scrie:

$$\Delta Q_{politrop} = C_V(T_f - T_1) - \frac{P_f V_f - P_i V_i}{n - 1}$$

3. Randamentul turbinei Pelton

(2 puncte) Într-un caz real, randamentul turbinei Pelton nu este descris de un ciclu Carnot. În această secțiune ne vom ocupa de calcularea randamentului acestei unice turbine având în vedere viteza relativă a jetului de apă față de turbină. Inițial, turbina se află în repaus si asupra corpului turbinei (asemanat unui solid rigid de raza totala data $R_0 = R + l$) acționeaza jetul care curge cu viteza v_2. Viteza v_2 este viteza jetului de apă după saltul hidraulic si se consideră cunoscută aici. Marcați sistemul de referință fix, inerțial, celui atașat albiei râului.
Așadar, mișcarea relativă trebuie analizată iar modul de antrenare al turbinei urmează schema de mai jos, unde v (tangențială) este viteza turbinei rigide după impactul cu fluxul/debitul masic de apă după o perioada de timp. Viteza relativă a jetului față de cea a turbinei rămâne constantă în timp, la fel ca și secțiunea transversală a jetului!
Definim fluxul de apă sau debitul masic incident ca masa de apă care se propagă de-a lungul râului pe unitatea de arie (secțiune transversală de inălțime $h_2 < 2R_0$ și lățime l) în unitatea de timp.



Care este **randamentul** η_P **al turbinei Pelton** în această configurație?

Notă

1. Teorema lui Steiner : momentul de inerție al unui solid rigid (format din mai multe componente rigid atașate) față de o axă paralela cu o axă care trece prin centrul de greutate al corpului, se calculează ca $I = I_0 + md^2$ unde d este distanța dintre cele 2 axe, m este masa corpului atașat rigid iar I_0 este momentul de inerție al corpului (central) față de axa care trece prin acesta. În cazul turbinei Pelton, corpul central este rotorul iar elementele atașate rigid acestuia sunt spițele.

Subiect propus de Diana-Ștefania Catană, Facultatea de Fizică, Universitatea din București (student) și ELI-NP, LDED