

BAREM

Partea I 1p oficiu

Atunci când resortul este tăiat pe jumătate, constanta elastică se dublează: dacă o forță F ar alungi resortul inițial cu o cantitate x , atunci ar alungi noul resort cu o cantitate $x' = \frac{x}{2}$. Folosind $F = -k \cdot x$ obținem $k' = 2k$. (0.5p)

Astfel, noul sistem conține două resorturi, fiecare având o constantă elastică de două ori mai mare decât constanta elastică a resortului inițial. (0.25p)

Prin urmare, constanta elastică efectivă a crescut cu un factor de patru. (0.5p)

Frecvența unghiulară este definită ca rădăcina pătrată a raportului dintre constanta elastică a resortului și masa corpului (care rămâne aceeași în cazul nostru): $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (0.25p)

Astfel, frecvența unghiulară va crește cu un factor de doi, noua frecvență fiind 2ω . (0.5p)

Partea II 1p oficiu

a)

Legea a doua a lui Newton:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \alpha^2 x(t) = 0$$

(1p)

Alegem $x(t)$ de forma Ce^{rt} (folosind sugestia din cerință referitoare la funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$), unde C este o constantă.

(0.5p)

Înlocuind în ecuația diferențială se obține:

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ce^{rt}) - \alpha^2 Ce^{rt} = 0$$

$$r^2 Ce^{rt} - \alpha^2 Ce^{rt} = 0$$

$$r^2 = \alpha^2$$

$$r = \pm \alpha$$

(0.5p)

b)

Acum că am aflat cele două valori posibile ale lui r , putem rescrie legea de mișcare:

$$x(t) = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$$

(0.5p)

Derivând obținem,

$$v(t) = \alpha A e^{\alpha t} - B \alpha e^{-\alpha t}$$

(0.5p)

Condiții inițiale:

$$x(0) = A + B = x_0$$

$$v(0) = \alpha A - \alpha B = 0$$

Rezolvând sistemul obținem,

$$A = B = \frac{x_0}{2}$$

(0.5p)

Astfel, legea de mișcare ia forma,

$$x(t) = \frac{x_0}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

(0.5p)

c)

În acest caz, condițiile inițiale sunt:

$$x(0) = A + B = 0$$

$$v(0) = \alpha A - \alpha B = v_0$$

Rezolvând sistemul obținem,

$$A = \frac{v_0}{2\alpha}$$

$$B = -\frac{v_0}{2\alpha}$$

(0.5p)

Astfel, legea de mișcare devine,

$$x(t) = \frac{v_0}{2\alpha} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})$$

(0.5p)

După un timp suficient de lung, cea de-a doua exponențială este neglijabilă.

(0.5p)

Pentru ca particula a doua să se apropie de prima, cele două legi de mișcare trebuie să coincidă, astfel coeficienții exponențialei care rămân trebuie să fie egali:

$$v_0 = \alpha x_0$$

(0.5p)