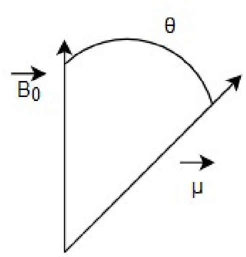
Dipoli în câmp magnetic extern

Ianc Octavian

Unii nuclei atomici au proprietăți de dipol magnetic, adică se comportă ca și cum ar fi niște magneți microscopici. În continuare, vom analiza comportamentul unui sistem de N astfel de atomi cu proprietăți fizice identice plasat într-un câmp magnetic extern uniform. Pe tot parcursul problemei vom presupune că particulele se mișcă liber și nu părăsesc zona în care există câmpul magnetic și vom neglija orice interacție cu excepția celei dipol-câmp.

Considerăm cunoscute:

1. B_0 - inducția magnetică a câmpului extern
2. μ - momentul de dipol magnetic al unui atom
3. N - numărul de atomi din sistem
4. k_B - constanta lui Boltzmann
5. T - temperatura absolută a sistemului



De asemenea, vom nota cu θ unghiul dintre vectorii $\vec{B_0}$ și $\vec{\mu}$ (vezi figura).

a) Se știe că asupra unui dipol plasat într-un câmp magnetic extern apare un moment al forței $\tau = \mu B_0 sin(\theta)$, ce tinde să îl orienteze paralel față de câmp. Calculați $E(\theta)$, energia sistemului în funcție de unghiul dintre vectori, considerând $E(\pi/2) = 0$.

Notă 1: în mișcarea circulară, momentul forței este echivalent forței din mișcarea rectilinie și se definește $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, unde $\vec{F}$ este forța aplicată corpului, iar $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului de aplicare. Astfel, lucrul mecanic efectuat de un moment al forței τ ce rotește un corp cu un unghi infinitesimal $d\theta$ este $dW = \tau d\theta$.

Notă 2: o ecuație diferențială de forma $dy = a(x)dx$ are soluția $y = \int a(x)\, dx$.

b) Considerăm că, după un timp suficient, sistemul ajunge într-o stare în care dipolii sunt orientați fie paralel (stare notată $\uparrow\uparrow$ și cu energia $\epsilon_{\uparrow\uparrow} = -\mu B_0$), fie antiparalel (stare notată $\uparrow\downarrow$ și cu energia $\epsilon_{\uparrow\downarrow} = \mu B_0$). Știind că, în această stare, probabilitatea ca un dipol să fie într-o stare cu energia ϵ_i se calculează după legea Maxwell-Boltzmann: $p_i \propto e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}}$ ($\propto$ denotă o relație de directă proporționalitate), calculați numărul de atomi din fiecare stare a sistemului ($N_{\uparrow\uparrow}$ și $N_{\uparrow\downarrow}$).

c) Presupunând că $\epsilon_i << k_B T$, calculați magnetizarea netă a sistemului, definită sub forma $M = \mu(N_{\uparrow\uparrow} - N_{\uparrow\downarrow})$. Se știe că, pentru $\mid x \mid << 1$, $e^x \approx 1 + x$.

d) Într-o altă stare a sistemului, în care dipolii sunt orientați, din nou, fie paralel, fie antiparalel, însă nu mai e valabilă distribuția Maxwell-Boltzmann menționată mai sus, magnetizarea netă a acestuia este $M = \mu m$, unde m este un număr întreg, $\mid m \mid \leq N$. Știind că atomii sunt distinctibili între ei (chiar dacă au aceleași proprietăți, interschimbarea lor generează o microstare nouă a sistemului), calculați numărul de microstări posibile pentru sistemul nostru.

Notă: se cunosc noțiunile de combinatorică din liceu:

1. numărul permutărilor de n elemente dintr-o mulțime: $P_n = n!$
2. numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
3. numărul combinărilor de n elemente luate câte k: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
4. binomul lui Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

e) În mecanica statistică, entropia unui sistem aflat într-o anumită stare poate definită cu formula $S = k_B ln(\Omega)$, unde Ω reprezintă numărul de microstări în care se poate afla sistemul. Cunoscând aproximația lui Stirling, $ln(n!) \approx n\, ln(n) - n$, calculați entropia sistemului definit la punctul d).

f) Demonstrați că entropia sistemului de la punctul d) este maximă pentru $M = 0$.